Aksjomat wyboru, a moja ciotka

Autor: Adam Krakowiak

Streszczenie

W niniejszym tekście autor, matematyk z zawodu i doktorant, opisuje swoje zdumienie, gdy podczas świątecznego obiadu odkrywa, że jego starsza ciotka Helena – emerytowana bibliotekarka – podejmuje codzienne decyzje w sposób formalnie izomorficzny z aksjomatem wyboru w teorii mnogości. Poprzez serię anegdot (wybór parasola, herbaty, serialu) narracja rekonstruuje nieuświadomioną funkcję wyboru, którą ciotka stosuje z niezwykłą konsekwencją. Tekst kończy się refleksją nad związkiem między aksjomatami matematyki a wolną wolą w życiu codziennym.

Moja ciotka Helena nigdy nie miała styczności z matematyką wyższą. Gdy jako dziecko pytałem ją, ile wynosi pierwiastek z dwóch, wzruszała ramionami i mówiła: *„Tyle, ile trzeba, kochanie”*. Przez lata uważałem ją za uosobienie antylogiki – osobę, która kieruje się kaprysem, przesądem i świątecznymi porządkami. Aż pewnego dnia, już jako doktorant na wydziale matematyki, przyjrzałem się jej uważniej. I ze zdumieniem stwierdziłem, że jej postępowanie spełnia wszystkie warunki aksjomatu wyboru.

Przypomnienie dla niematematyków

Aksjomat wyboru (AC) mówi, że dla każdej rodziny niepustych zbiorów istnieje funkcja, która każdemu zbiorowi przyporządkowuje dokładnie jeden jego element. Innymi słowy: można z każdego pudełka wybrać po jednym elemencie, nie podając żadnej konkretnej recepty – wystarczy, że „jakoś” dokonamy wyboru. Dla logików i filozofów jest to źródło niekończących się sporów: jedni go przyjmują, inni odrzucają, ale wszyscy zgadzają się, że bez niego współczesna matematyka staje się niewygodnie niepełna.

Ciotka Helena w działaniu

Ciotka ma w przedpokoju stojak na parasole. Stoi tam pięć sztuk: trzy czarne (w różnych stanach zużycia), jeden granatowy i jeden z żółtymi kropkami. Gdy pada deszcz, sięga po parasol w kropki. Gdy świeci słońce i wychodzi na targ – bierze granatowy. Gdy jest pochmurno, ale nie pada – wybiera czarny, ten z najdłuższą rączką.

Zapytałem ją kiedyś: *„A co byś zrobiła, gdyby wszystkie parasole były równoważne i nie było żadnego kryterium wyboru?”* Spojrzała na mnie jak na osobę, która właśnie zaproponowała rewolucję w fizyce. *„Zawsze jest jakieś kryterium”* – odpowiedziała. *„Nawet jeśli to tylko to, że ten jest najbliżej ręki”*.

Zaintrygowany zapisałem jej decyzje w języku teorii mnogości. Niech P oznacza zbiór wszystkich sytuacji decyzyjnych (para: pogoda, dzień tygodnia, oraz to, czy akurat leci „Klan”). Dla każdej sytuacji $s \in P$ istnieje niepusty zbiór dostępnych działań D_s. Ciotka wybiera zawsze jeden element $f(s) \in D_s$. Co więcej – przy tych samych warunkach wybór jest zawsze identyczny. Otrzymujemy więc funkcję $f : P \to \bigcup_s D_s$, spełniającą warunek $f(s) \in D_s$. Dla matematyka: to klasyczna funkcja wyboru.

Pasjans jako konstrukcja porządku

Najbardziej zdumiewające nie było to, *że* ciotka posiada taką funkcję, ale *jak* ją konstruuje w sytuacjach równoważnych.

Pewnego wieczoru zapytałem ją, dlaczego wybrała serial przyrodniczy zamiast kryminału. Ciotka westchnęła i wyjęła z szuflady talię kart. *„Zobacz”* – powiedziała.

Rozłożyła pasjansa „Pająk”. Po kilkunastu minutach układ się zablokował. Ciotka spojrzała na karty i oznajmiła: *„Dziś kryminał. Król pików zdecydował”*.

Okazało się, że od lat stosuje następującą procedurę: w sytuacjach nierozstrzygalnych układa pasjansa (deterministyczny wariant bez losowości). Wynik gry traktuje jako liniowy porządek na zbiorze opcji. Wybiera więc element najmniejszy względem tak skonstruowanego porządku. Innymi słowy: buduje dobry porządek i stosuje klasyczną wersję aksjomatu wyboru.

Refleksje przy kompocie

> „Aksjomat wyboru jest prawdziwy, bo ja go codziennie używam. I nie mów mi o Banachu–Tarskim – nikt i tak nie kroi pomarańczy na nieskończenie wiele kawałków."
>
> Ciotka Helena, przy wigilijnym stole

Czy ciotka „rozumie" aksjomat wyboru? Oczywiście, że nie. Podobnie jak bohater Moliera, który nie wiedział, że mówi prozą. A jednak jej codzienne decyzje stanowią żywy model teorii mnogości.

Być może aksjomat wyboru nie jest jedynie abstrakcyjnym twierdzeniem o istnieniu, ale ukrytą procedurą, którą stosujemy na co dzień – tylko w bardziej przyziemnych formach. Nawet jeśli nie potrafimy jej formalnie zapisać, i tak z niej korzystamy.

Pozostaje pytanie, które wraca do mnie częściej niż powinno: czy jeśli wszystkie nasze decyzje da się sprowadzić do funkcji wyboru, to czy w ogóle istnieje coś takiego jak wolna wola?

Ciotka nie odpowiada. Woli tasować karty.

Tekst powstał na podstawie obserwacji terenowych prowadzonych podczas świąt Bożego Narodzenia i Wielkanocy. Autor dziękuje ciotce Helenie za cierpliwość oraz nieświadome dostarczenie modelu do jednej z ulubionych teorii matematycznych.