Asymptote
ISSN 3072-4929

Kategoria

ESEJ

Kolejność ma znaczenie

O szeregach, które można przestawić

Maria Świderska

Asymptote 04/2026 · sierpień 2026
© 2026 Asymptote

Streszczenie. Esej wychodzi od twierdzenia Riemanna o przestawianiu wyrazów szeregu: szereg zbieżny warunkowo można tak uporządkować, by jego suma była dowolną liczbą rzeczywistą — albo by w ogóle przestał się zbiegać. Autorka zestawia to zjawisko z szeregami zbieżnymi bezwzględnie, którym kolejność jest obojętna, przywołuje rachunek pokazujący, jak z $\ln 2$ zrobić $\frac{1}{2}\ln 2$, oraz twierdzenie Lévy'ego–Steinitza. Z matematyki przechodzi do pytania o to, kiedy w życiu porządek zdarzeń zmienia ich sumę, a kiedy jest tylko kwestią opowieści.

Na pierwszym roku studiów, w listopadzie, kiedy za oknem sali wykładowej było ciemno już o szesnastej, asystentka od analizy napisała na tablicy dwie sumy. Wyglądały prawie tak samo. Te same liczby, te same znaki, te same ułamki — tylko w innej kolejności. Pod pierwszą napisała $\ln 2$. Pod drugą $\frac{1}{2}\ln 2$. Potem odwróciła się do nas i powiedziała: „Dodawanie jest przemienne. Prawda?". Nikt nie odpowiedział. Wszyscy czuliśmy, że to pułapka, ale nikt nie umiał wskazać, gdzie stoi sidło.

Pierwsza suma to szereg anharmoniczny:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \ln 2.$$

Druga to ten sam zbiór wyrazów, tylko ustawiony inaczej: po każdym wyrazie dodatnim dwa ujemne,

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

Wystarczy zgrupować wyrazy po trzy, by zobaczyć, co się dzieje: $\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2}\right) - \frac{1}{4k} = \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$. Każda trójka to dokładnie połowa odpowiedniej pary z pierwszego szeregu. Nic nie zginęło, nic nie przybyło. A suma zmalała dwukrotnie.

Pamiętam, że poczułam wtedy coś w rodzaju zawrotu głowy. Przemienność dodawania była dla mnie czymś w rodzaju prawa natury: dwa plus trzy to trzy plus dwa, i koniec. Okazało się, że to prawo obowiązuje tylko dla skończenie wielu składników. W nieskończoności kolejność przestaje być grzecznościowym szczegółem. Staje się treścią.

Riemann pokazał więcej, niż pokazała nam asystentka. Jeśli szereg jest zbieżny, ale szereg wartości bezwzględnych jego wyrazów jest rozbieżny — mówimy wtedy, że jest zbieżny *warunkowo* — to jego wyrazy można przestawić tak, by suma wynosiła dowolną z góry wybraną liczbę. Siedem. Minus pi. Milion. Można też przestawić je tak, by szereg uciekł do nieskończoności albo oscylował bez końca. Dowód jest zaskakująco prosty i ma w sobie coś z gospodarności: wyrazy dodatnie sumują się do nieskończoności, ujemne też, a same wyrazy maleją do zera. Bierzesz więc dodatnie, dopóki nie przekroczysz celu; potem ujemne, dopóki nie spadniesz poniżej; potem znowu dodatnie. Kroki są coraz mniejsze, więc kołysanie wokół celu gaśnie. Suma zbiega tam, gdzie chcesz.

Jest w tym coś niepokojąco ludzkiego. Ten sam materiał, te same zdarzenia, a wynik zależy od tego, jak je ułożysz. Biografie piszą się w ten sposób. Kłótnie też.

Ale matematyka nie zostawia nas z samym niepokojem. Obok szeregów zbieżnych warunkowo są szeregi zbieżne *bezwzględnie* — te, w których nawet suma wartości bezwzględnych jest skończona. I dla nich twierdzenie jest odwrotne: każde przestawienie daje tę samą sumę. Kolejność przestaje mieć znaczenie. Nie dlatego, że jest zakazana, tylko dlatego, że nie ma już czego zmieniać. Wszystkie wyrazy razem są „małe" w sensie, który nie zależy od opowieści.

Lubię tę różnicę między „warunkowo" i „bezwzględnie". W języku potocznym brzmi jak różnica charakterów. Ktoś kocha warunkowo, ktoś bezwzględnie. W analizie jest to różnica dokładnie tego rodzaju: czy wynik przetrwa każdą zmianę kolejności, czy tylko tę jedną, którą ktoś dla nas wybrał.

Na drugim roku poznałam twierdzenie Lévy'ego–Steinitza i zrozumiałam, że jednowymiarowa historia była tylko początkiem. Gdy wyrazami szeregu są wektory na płaszczyźnie albo w przestrzeni, zbiór wszystkich sum, jakie da się uzyskać przez przestawianie, nie jest dowolny. Jest punktem, prostą, płaszczyzną — przesuniętą podprzestrzenią liniową. Kolejność ma znaczenie,

ale tylko w pewnych kierunkach. W innych jest bezsilna. To zdanie wydaje mi się jednym z najmądrzejszych, jakie matematyka mówi o swobodzie: możesz wiele, ale możliwości mają kształt.

Myślę czasem o tym, które części mojego życia są zbieżne bezwzględnie. Te, o których mogę opowiadać w dowolnej kolejności, i zawsze wyjdzie ta sama suma. Przyjaźnie, które przetrwały każde przetasowanie. Decyzje, które nie zależały od tego, co działo się dzień wcześniej. I są też te warunkowe: lata, w których wszystko zależało od tego, co przyszło najpierw, a co potem. Gdyby list przyszedł tydzień później. Gdybym najpierw usłyszała dobrą wiadomość, a dopiero potem złą. Te same wyrazy, inna suma.

Asystentka od analizy, kiedy już skończyła rachunek, starła tablicę i powiedziała jeszcze jedno zdanie, które zapisałam na marginesie zeszytu: „Nieskończoność nie jest dużą liczbą. Jest procesem. A w procesie liczy się kolejność". Wtedy wydawało mi się to tylko zgrabnym zakończeniem ćwiczeń. Dziś myślę, że to najkrótsza definicja historii, jaką znam.

Szereg zbieżny bezwzględnie jest spokojny. Szereg zbieżny warunkowo jest ciekawy. Matematyka nie każe wybierać między nimi. Każe tylko wiedzieć, z którym ma się do czynienia — zanim zacznie się przestawiać wyrazy.