Asymptote
ISSN 3072-4929

Kategoria

KĄCIK OLIMPIJCZYKA

Rachunek zamiast natchnienia

Analityczne dowody olimpijskich zadań geometrycznych

Karol Tomczak

Asymptote 04/2026 · sierpień 2026
© 2026 Asymptote

Streszczenie. Pierwszy odcinek nowego działu poświęconego matematyce olimpijskiej — algebrze, kombinatoryce, teorii liczb i geometrii. Na początek geometria: autor zbiera kilkanaście klasycznych twierdzeń i zadań olimpijskich z geometrii — od prostej Eulera i prostej Simsona, przez twierdzenia Napoleona, Brahmagupty, Monge'a i o motylku, po zadania z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej z lat 2007 i 2008 — i dowodzi ich wyłącznie metodami analitycznymi: liczbami zespolonymi na okręgu jednostkowym, współrzędnymi kartezjańskimi, rachunkiem wektorowym i współrzędnymi barycentrycznymi. Każdy dowód jest kompletny; wszystkie potrzebne wzory pomocnicze zostały wyprowadzone na początku.

Zamiast wstępu

Każdy, kto pisał olimpiadę, zna ten moment. Rysunek jest piękny, teza ewidentna, cyrkiel odłożony, a syntetycznego pomysłu — brak. Wtedy zostają dwie drogi: czekać na natchnienie albo liczyć. Ten dział jest o drugiej drodze.

Dowody analityczne mają złą prasę. Mówi się, że są „brzydkie", że „nic nie wyjaśniają", że to „bashowanie". Częściowo słusznie: rachunek rzadko pokazuje, *dlaczego* coś zachodzi. Ale ma jedną zaletę, której nie ma żadna inna metoda — *zawsze się kończy*. Nie wymaga szczęścia, tylko porządku. A dobrze dobrany układ współrzędnych potrafi być równie elegancki jak najsprytniejsza konstrukcja pomocnicza. W tym odcinku spróbuję to pokazać na kilkunastu przykładach.

Najpierw skrzynka z narzędziami. Potem zadania — od klasyki po Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną.

Skrzynka z narzędziami

Liczby zespolone na okręgu jednostkowym. Punkty oznaczamy małymi literami odpowiadającymi wielkim: punktowi A odpowiada liczba zespolona a. Jeśli trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O, przyjmujemy $o = 0$ i promień 1. Wtedy dla każdego punktu okręgu

$$|a| = 1 \iff a\overline{a} = 1 \iff \overline{a} = \frac{1}{a}.$$

To jedno zdanie jest silnikiem całej metody: sprzężenie punktu na okręgu jest jego odwrotnością, więc rachunki na sprzężeniach stają się rachunkami na ułamkach. W szczególności dla $|a| = |b| = 1$:

$$\overline{a - b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{a-b}{ab}.$$

Kryteria. Dla różnych punktów P, Q, R:

- P, Q, R są współliniowe $\iff \dfrac{p-q}{p-r} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{p-q}{p-r} = \overline{\left(\dfrac{p-q}{p-r}\right)}$;
- $PQ \perp RS \iff \dfrac{p-q}{r-s} \in i\mathbb{R} \iff \dfrac{p-q}{r-s} = -\overline{\left(\dfrac{p-q}{r-s}\right)}$.

Lemat 1 (rzut prostokątny na cięciwę)**.** Niech $|a| = |b| = 1$, $a \neq b$. Rzut prostokątny punktu z na prostą AB to

$$f = \frac{1}{2}\big(a + b + z - ab\,\overline{z}\big).$$

Dowód. Punkt f leży na AB, więc $\frac{f-a}{b-a}$ jest rzeczywiste. Ze wzoru $\overline{b-a} = -\frac{b-a}{ab}$ dostajemy

$$\frac{f-a}{b-a} = \frac{\overline{f}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = -ab\,\frac{\overline{f}-\frac{1}{a}}{b-a}, \qquad \text{czyli} \qquad f + ab\,\overline{f} = a + b.$$

Odcinek ZF jest prostopadły do AB, więc $\frac{z-f}{b-a}$ jest czysto urojone:

$$\frac{z-f}{b-a} = -\frac{\overline{z}-\overline{f}}{\overline{b}-\overline{a}} = ab\,\frac{\overline{z}-\overline{f}}{b-a}, \qquad \text{czyli} \qquad f - ab\,\overline{f} = z - ab\,\overline{z}.$$

Dodając oba równania, otrzymujemy $2f = a + b + z - ab\,\overline{z}$. ■

Lemat 2 (przecięcie stycznych)**.** Styczne do okręgu jednostkowego w punktach A i B ($a \neq \pm b$) przecinają się w punkcie

$$t = \frac{2ab}{a+b}.$$

Dowód. Styczna w A jest prostopadła do promienia OA, więc $\frac{t-a}{a}$ jest czysto urojone: $\frac{t}{a} - 1 + a\overline{t} - 1 = 0$, tj. $\frac{t}{a} + a\overline{t} = 2$. Analogicznie $\frac{t}{b} + b\overline{t} = 2$. Z pierwszego równania $\overline{t} = \frac{2a-t}{a^2}$; po wstawieniu do drugiego

$$\frac{t}{b} + \frac{b(2a-t)}{a^2} = 2 \iff t \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2 b} = \frac{2(a-b)}{a} \iff t = \frac{2ab}{a+b}.$$ ■

Lemat 3 (ortocentrum)**.** Jeśli $|a| = |b| = |c| = 1$, to ortocentrum trójkąta ABC to $h = a + b + c$.

Dowód. Mamy $\frac{h-a}{b-c} = \frac{b+c}{b-c}$, a

$$\overline{\left(\frac{b+c}{b-c}\right)} = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}} = \frac{c+b}{c-b} = -\frac{b+c}{b-c},$$

więc liczba ta jest czysto urojona, tj. $AH \perp BC$. Z symetrii $BH \perp CA$, zatem H jest ortocentrum. ■

Wektory. Środek okręgu opisanego bierzemy za początek układu, wektory oznaczamy jak punkty: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$, przy czym $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = R$. Lemat 3 w wersji wektorowej (twierdzenie Sylvestera) brzmi: $\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ — dowód jest ten sam: $(\vec{H} - \vec{A}) \cdot (\vec{B} - \vec{C}) = |\vec{B}|^2 - |\vec{C}|^2 = 0$.

Współrzędne barycentryczne. Punkt P płaszczyzny zapisujemy jako $(\alpha : \beta : \gamma)$, jeśli $(\alpha+\beta+\gamma)\vec{P} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$. Punkt na boku BC dzielący go w stosunku $BD : DC = p : q$ ma współrzędne $(0 : q : p)$, a prosta AD to zbiór punktów $(t : q : p)$, $t \in \mathbb{R}$ — czyli tych, w których stosunek drugiej współrzędnej do trzeciej jest równy $q : p$.

Zadania

Zadanie 1 (prosta Eulera)**.** Udowodnij, że środek okręgu opisanego O, środek ciężkości G i ortocentrum H dowolnego trójkąta leżą na jednej prostej oraz $OH = 3\,OG$.

Dowód. Na okręgu jednostkowym $o = 0$, $g = \frac{a+b+c}{3}$, a z lematu 3 $h = a + b + c$. Zatem $h = 3g$, czyli $\vec{OH} = 3\,\vec{OG}$: punkty są współliniowe i $OH = 3\,OG$. ■

Zadanie 2 (odbicia ortocentrum)**.** Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC, a M środkiem boku BC. Udowodnij, że:

1. obraz H w symetrii względem prostej BC leży na okręgu opisanym na ABC;
2. obraz H w symetrii względem punktu M jest punktem okręgu opisanego diametralnie przeciwległym do A.

Dowód. (1) Obraz z' punktu z w symetrii względem BC to $2f - z$, gdzie f jest rzutem z lematu 1: $z' = b + c - bc\,\overline{z}$. Dla $z = h$ mamy $\overline{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, więc

$$h' = b + c - bc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = b + c - \frac{bc}{a} - c - b = -\frac{bc}{a},$$

a $\left|-\frac{bc}{a}\right| = 1$.

(2) Symetria względem M: $h'' = 2m - h = (b + c) - (a + b + c) = -a$. To punkt okręgu jednostkowego diametralnie przeciwległy do a. ■

Zadanie 3 (okrąg dziewięciu punktów)**.** Udowodnij, że środki boków trójkąta, spodki jego wysokości oraz środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami leżą na jednym okręgu, którego promień jest połową promienia okręgu opisanego.

Dowód. Niech $n = \frac{a+b+c}{2}$. Pokażemy, że każdy z dziewięciu punktów jest odległy od n o $\frac{1}{2}$. Z symetrii wystarczy rozważyć punkty związane z wierzchołkiem A i bokiem BC.

- Środek BC: $\left|\frac{b+c}{2} - n\right| = \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
- Środek AH: $\frac{a+h}{2} = \frac{2a+b+c}{2}$, więc $\left|\frac{2a+b+c}{2} - n\right| = \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
- Spodek wysokości z A: z lematu 1 (dla $z = a$, $\overline{a} = \frac{1}{a}$) jest to $d = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{bc}{a}\right)$, zatem $|d - n| = \frac{1}{2}\left|\frac{bc}{a}\right| = \frac{1}{2}$. ■

Zadanie 4 (prosta Simsona)**.** Niech P będzie punktem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że rzuty prostokątne punktu P na proste BC, CA, AB są współliniowe.

Dowód. Ponieważ $\overline{p} = \frac{1}{p}$, z lematu 1 rzuty to

$$d = \tfrac{1}{2}\left(p + b + c - \tfrac{bc}{p}\right), \quad e = \tfrac{1}{2}\left(p + c + a - \tfrac{ca}{p}\right), \quad f = \tfrac{1}{2}\left(p + a + b - \tfrac{ab}{p}\right).$$

Stąd

$$e - d = \frac{(a-b)(p-c)}{2p}, \qquad f - d = \frac{(a-c)(p-b)}{2p}, \qquad \frac{e-d}{f-d} = \frac{(a-b)(p-c)}{(a-c)(p-b)}.$$

Sprzężenie tej liczby, po zastąpieniu każdego $\overline{x}$ przez $\frac{1}{x}$ i pomnożeniu licznika i mianownika przez $abcp$, wynosi

$$\frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{\frac{b-a}{ab} \cdot \frac{c-p}{pc}}{\frac{c-a}{ac} \cdot \frac{b-p}{pb}} = \frac{(b-a)(c-p)}{(c-a)(b-p)} = \frac{(a-b)(p-c)}{(a-c)(p-b)}.$$

Liczba jest równa swojemu sprzężeniu, więc jest rzeczywista: D, E, F są współliniowe. ■

Zadanie 5 (nierówność i twierdzenie Ptolemeusza)**.** Udowodnij, że dla dowolnych punktów A, B, C, D płaszczyzny

$$AC \cdot BD \le AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

przy czym równość zachodzi dla każdego czworokąta wypukłego $ABCD$ wpisanego w okrąg.

Dowód. Bezpośrednie wymnożenie daje tożsamość (tym razem dla dowolnych liczb zespolonych)

$$(a - c)(b - d) = (a - b)(c - d) + (a - d)(b - c).$$

Biorąc moduły i stosując nierówność trójkąta $|u + v| \le |u| + |v|$, dostajemy tezę. Równość w nierówności trójkąta zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{u}{v}$ jest dodatnią liczbą rzeczywistą, tutaj

$$\frac{u}{v} = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} = -\frac{b-a}{d-a} \cdot \frac{d-c}{b-c}.$$

Argumenty czynników $\frac{b-a}{d-a}$ i $\frac{d-c}{b-c}$ to kąty skierowane $\measuredangle DAB$ i $\measuredangle BCD$. Liczba $\frac{u}{v}$ jest dodatnia dokładnie wtedy, gdy te kąty sumują się do π (modulo 2π) — a to dla czworokąta wypukłego $ABCD$ oznacza $\angle A + \angle C = \pi$, czyli wpisywalność w okrąg. ■

Zadanie 6 (symedianna)**.** Styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach B i C przecinają się w punkcie T. Niech M będzie środkiem boku BC. Udowodnij, że proste AT i AM są symetryczne względem dwusiecznej kąta BAC.

Dowód. Proste AX i AY są symetryczne względem dwusiecznej kąta BAC wtedy i tylko wtedy, gdy $\measuredangle(AB, AX) = \measuredangle(AY, AC)$, czyli gdy argumenty liczb $\frac{x-a}{b-a}$ oraz $\frac{c-a}{y-a}$ są równe modulo π, tj.

$$W = \frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(c-a)} \in \mathbb{R}.$$

Bierzemy $x = m = \frac{b+c}{2}$ i — z lematu 2 — $y = t = \frac{2bc}{b+c}$:

$$m - a = \frac{b+c-2a}{2}, \qquad t - a = \frac{2bc-ab-ac}{b+c}, \qquad W = \frac{(b+c-2a)(2bc-ab-ac)}{2(b+c)(b-a)(c-a)}.$$

Liczymy sprzężenia czynników:

$$\overline{b+c-2a} = -\frac{2bc-ab-ac}{abc}, \qquad \overline{2bc-ab-ac} = -\frac{b+c-2a}{abc},$$
$$\overline{b+c} = \frac{b+c}{bc}, \qquad \overline{(b-a)(c-a)} = \frac{(b-a)(c-a)}{a^2bc}.$$

Zatem

$$\overline{W} = \frac{\dfrac{(b+c-2a)(2bc-ab-ac)}{a^2b^2c^2}}{2 \cdot \dfrac{b+c}{bc} \cdot \dfrac{(b-a)(c-a)}{a^2bc}} = \frac{(b+c-2a)(2bc-ab-ac)}{2(b+c)(b-a)(c-a)} = W,$$

czyli $W \in \mathbb{R}$, co kończy dowód. ■

Zadanie 7. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a punkt N — środkiem odcinka AC. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie CMN. Okrąg ten przecina prostą BC ponownie w punkcie P różnym od C. Punkt Q wybrano tak, że proste QP i QN są styczne do Ω. Wykazać, że miary kątów QAM i QMA są równe.

Dowód. Wystarczy wykazać, że $QA = QM$ — wtedy trójkąt QAM jest równoramienny i kąty przy podstawie AM są równe.

Tym razem okręgiem jednostkowym czynimy nie okrąg opisany na ABC, lecz Ω: niech $|c| = |m| = |n| = |p| = 1$. Ponieważ N i M są środkami odcinków AC i AB,

$$a = 2n - c, \qquad b = 2m - a = 2m - 2n + c.$$

Punkt P. Mamy $b - c = 2(m-n)$, więc $BC \parallel MN$ (to po prostu twierdzenie o linii środkowej). Cięciwy CP i MN okręgu Ω są zatem równoległe, czyli $\frac{c-p}{m-n} \in \mathbb{R}$. Ze wzoru $\overline{x-y} = -\frac{x-y}{xy}$ dla $|x| = |y| = 1$:

$$\overline{\left(\frac{c-p}{m-n}\right)} = \frac{-\frac{c-p}{cp}}{-\frac{m-n}{mn}} = \frac{c-p}{m-n} \cdot \frac{mn}{cp},$$

a ponieważ $c \neq p$, równość tej liczby z jej sprzężeniem oznacza $cp = mn$, tj.

$$p = \frac{mn}{c}.$$

Punkt Q. Z lematu 2 (styczne do Ω w P i N; zakładamy, jak w treści, że punkt Q istnieje, czyli $p \neq -n$, równoważnie $m + c \neq 0$):

$$q = \frac{2pn}{p+n} = \frac{2\,\frac{mn^2}{c}}{\frac{n(m+c)}{c}} = \frac{2mn}{m+c}.$$

Odległości. Liczymy

$$q - m = \frac{2mn - m^2 - mc}{m+c} = -\frac{m\,(m+c-2n)}{m+c},$$
$$q - a = \frac{2mn - (2n-c)(m+c)}{m+c} = \frac{c\,(m+c-2n)}{m+c}.$$

Zatem

$$q - a = -\frac{c}{m}\,(q-m),$$

a ponieważ $\left|\frac{c}{m}\right| = 1$, otrzymujemy $|q-a| = |q-m|$, czyli $QA = QM$. Stąd $\angle QAM = \angle QMA$. ■

Komentarz. Cały dowód rozstrzyga wybór okręgu jednostkowego: gdy jest nim Ω, punkty A i B wyrażają się liniowo przez c, m, n, a warunek $BC \parallel MN$ daje od razu położenie P. Warunek $AB < AC$ zapewnia jedynie niezdegenerowanie konfiguracji (m.in. $P \neq C$).

Zadanie 8 (twierdzenie Napoleona)**.** Na bokach trójkąta ABC zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne. Udowodnij, że ich środki są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Dowód. Niech $\omega = e^{2\pi i/3}$; wtedy $\omega^3 = 1$ i $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

Lemat. Trójkąt PQR jest równoboczny i dodatnio zorientowany wtedy i tylko wtedy, gdy $p + \omega q + \omega^2 r = 0$. Istotnie, wobec $1 + \omega + \omega^2 = 0$ warunek ten jest równoważny $(p-r) + \omega(q-r) = 0$, czyli $p - r = e^{-i\pi/3}(q-r)$: punkt P powstaje z Q przez obrót o kąt -60° wokół R, więc $RP = RQ$, $\angle PRQ = 60^\circ$, a obieg $P \to Q \to R$ jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

Niech ABC będzie zorientowany dodatnio. Trójkąt równoboczny zbudowany na zewnątrz na boku BC ma wierzchołki C, B, A' w orientacji dodatniej, więc $c + \omega b + \omega^2 a' = 0$, skąd $a' = -\omega c - \omega^2 b$. Jego środek to

$$x = \frac{b + c + a'}{3} = \frac{(1-\omega^2)b + (1-\omega)c}{3},$$

i cyklicznie $y = \frac{(1-\omega^2)c + (1-\omega)a}{3}$, $z = \frac{(1-\omega^2)a + (1-\omega)b}{3}$. Obliczamy współczynniki przy a, b, c w wyrażeniu $3(x + \omega y + \omega^2 z)$:

$$\begin{aligned} &\text{przy } a: && \omega(1-\omega) + \omega^2(1-\omega^2) = \omega - \omega^4 = 0,\\ &\text{przy } b: && (1-\omega^2) + \omega^2(1-\omega) = 1 - \omega^3 = 0,\\ &\text{przy } c: && (1-\omega) + \omega(1-\omega^2) = 1 - \omega^3 = 0. \end{aligned}$$

Zatem $x + \omega y + \omega^2 z = 0$ i z lematu trójkąt XYZ jest równoboczny. ■

Zadanie 9 (twierdzenie Brahmagupty)**.** Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg są prostopadłe i przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że prosta przechodząca przez P i prostopadła do AB przechodzi przez środek boku CD.

Dowód. Kładziemy $P = (0,0)$, przekątną AC na osi x, przekątną BD na osi y: $A = (a,0)$, $C = (c,0)$, $B = (0,b)$, $D = (0,d)$. Okrąg ma równanie $x^2 + y^2 + Ex + Fy + G = 0$. Jego przecięcie z osią x to pierwiastki równania $x^2 + Ex + G = 0$, więc ze wzorów Viète'a $ac = G$; analogicznie z osią y: $bd = G$. Zatem $ac = bd$.

Wektor $\vec{AB} = (-a, b)$, więc prosta przez P prostopadła do AB ma kierunek (b, a). Środek CD to $N = \left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right)$. Punkt N leży na prostej przechodzącej przez P w kierunku (b, a), bo

$$\det \begin{pmatrix} b & a \\ \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \end{pmatrix} = \frac{bd - ac}{2} = 0.$$

Prosta ta przecina CD w jednym punkcie (nie zawiera CD, bo $P \notin CD$), a N leży na obu — więc jest nim środek CD. ■

Zadanie 10 (twierdzenie o motylku)**.** Niech M będzie środkiem cięciwy PQ okręgu. Przez M poprowadzono dwie inne cięciwy AB i CD. Proste AD i BC przecinają prostą PQ w punktach X i Y. Udowodnij, że $MX = MY$.

Dowód. Niech $M = (0, 0)$, a PQ leży na osi x. Okrąg: $x^2 + y^2 + Ex + Fy + G = 0$. Jego przecięcia z osią x, czyli P i Q, są pierwiastkami $x^2 + Ex + G = 0$; ponieważ M jest środkiem PQ, ich suma $-E$ jest zerem. Zatem okrąg to $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + Fy + G = 0$, przy czym $G < 0$ (bo M leży wewnątrz okręgu). Proste AB i CD to $y = sx$ i $y = tx$ ($s, t \neq 0$, bo cięciwy są różne od PQ).

Rozważmy pęk krzywych

$$\Gamma_\lambda : \ \Phi(x, y) + \lambda\,(y - sx)(y - tx) = 0.$$

Każda z nich przechodzi przez A, B, C, D. Wybierzmy na prostej AD punkt Z różny od A i D, nieleżący na prostych AB, CD. Wtedy $(y - sx)(y - tx) \neq 0$ w Z, więc istnieje λ, dla którego $Z \in \Gamma_\lambda$. Ograniczenie wielomianu stopnia 2 do prostej AD jest wielomianem stopnia co najwyżej 2 jednej zmiennej, który ma trzy pierwiastki (A, D, Z) — więc jest tożsamościowo zerowy, tzn. $\Gamma_\lambda \supseteq AD$ i lewa strona rozkłada się na iloczyn równania prostej AD i pewnego czynnika liniowego ℓ. Punkty B i C leżą na Γ_λ, a nie leżą na AD (trzy różne punkty okręgu nie są współliniowe), więc leżą na ℓ: $\Gamma_\lambda = AD \cup BC$.

Punkty X i Y leżą na Γ_λ i na osi x. Podstawiając $y = 0$:

$$(1 + \lambda st)\, x^2 + G = 0.$$

Ponieważ $G \neq 0$, mamy $1 + \lambda st \neq 0$, a oba punkty X, Y spełniają $x^2 = \frac{-G}{1+\lambda st}$. Zatem $|x_X| = |x_Y|$, czyli $MX = MY$. ■

Zadanie 11 (IMO 2007, zadanie 4)**.** Dwusieczna kąta BCA trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie ponownie w punkcie R, symetralną boku BC w punkcie P, a symetralną boku AC w punkcie Q. Punkt K jest środkiem boku BC, a L — środkiem boku AC. Udowodnij, że trójkąty RPK i RQL mają równe pola.

Dowód. Niech $C = (0, 0)$, dwusieczna kąta C to oś x, $\theta = \frac{1}{2}\angle BCA \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a = BC$, $b = CA$. Wtedy

$$A = b(\cos\theta, \sin\theta), \qquad B = a(\cos\theta, -\sin\theta), \qquad K = \tfrac{a}{2}(\cos\theta, -\sin\theta), \qquad L = \tfrac{b}{2}(\cos\theta, \sin\theta).$$

Punkt P. Szukamy $P = (p, 0)$ z $PC = PB$: $p^2 = (p - a\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta$, skąd $p = \frac{a}{2\cos\theta}$. Analogicznie $Q = \left(\frac{b}{2\cos\theta}, 0\right)$.

Punkt R. Okrąg opisany przechodzi przez początek układu, więc ma równanie $x^2 + y^2 + Ux + Vy = 0$. Podstawiając A i B i dzieląc przez b oraz a:

$$b + U\cos\theta + V\sin\theta = 0, \qquad a + U\cos\theta - V\sin\theta = 0.$$

Dodając: $U = -\frac{a+b}{2\cos\theta}$. Drugi punkt przecięcia z osią x to $R = (-U, 0) = \left(\frac{a+b}{2\cos\theta}, 0\right)$.

Pola. Punkty R, P, Q leżą na osi x, więc pole trójkąta to połowa podstawy razy odległość trzeciego wierzchołka od osi:

$$[RPK] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2\cos\theta} - \frac{a}{2\cos\theta}\right) \cdot \frac{a}{2}\sin\theta = \frac{ab\tan\theta}{8},$$

$$[RQL] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2\cos\theta} - \frac{b}{2\cos\theta} \right) \cdot \frac{b}{2} \sin\theta = \frac{ab\tan\theta}{8}. \qquad \blacksquare$$

Zadanie 12 (IMO 2008, zadanie 1)**.** Trójkąt ostrokątny ABC ma ortocentrum H. Okrąg o środku w środku boku BC przechodzący przez H przecina prostą BC w punktach A_1 i A_2. Analogicznie określamy B_1, B_2 (dla boku CA) oraz C_1, C_2 (dla boku AB). Udowodnij, że punkty $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leżą na jednym okręgu.

Dowód. Początek układu w środku okręgu opisanego O, promień R; z twierdzenia Sylvestera $\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$. Niech $\vec{M} = \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2}$ będzie środkiem BC. Ponieważ $OM \perp BC$, a A_1 leży na BC w odległości MH od M, z twierdzenia Pitagorasa

$$OA_1^2 = OA_2^2 = |\vec{M}|^2 + |\vec{H} - \vec{M}|^2.$$

Liczymy, korzystając z $|\vec{A}|^2 = |\vec{B}|^2 = |\vec{C}|^2 = R^2$:

$$|\vec{M}|^2 = \frac{2R^2 + 2\vec{B}\cdot\vec{C}}{4} = \frac{R^2 + \vec{B}\cdot\vec{C}}{2},$$

$$|\vec{H} - \vec{M}|^2 = \left|\vec{A} + \tfrac{\vec{B}+\vec{C}}{2}\right|^2 = R^2 + \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) + \frac{R^2 + \vec{B}\cdot\vec{C}}{2}.$$

Stąd

$$OA_1^2 = 2R^2 + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{C} + \vec{C}\cdot\vec{A}.$$

Wyrażenie jest symetryczne względem A, B, C, więc tę samą wartość mają $OB_1^2, OB_2^2, OC_1^2, OC_2^2$. Wszystkie sześć punktów leży na okręgu o środku O. $\blacksquare$

Zadanie 13 (twierdzenie Monge'a)**.** Dane są trzy okręgi o środkach O_1, O_2, O_3 i parami różnych promieniach r_1, r_2, r_3. Dla każdej pary okręgów niech E_{ij} będzie ich zewnętrznym środkiem jednokładności. Udowodnij, że punkty E_{12}, E_{23}, E_{31} są współliniowe.

Dowód. Jednokładność o środku E_{ij} i skali $\frac{r_j}{r_i} > 0$ przeprowadza O_i na O_j: $\vec{E}_{ij} + \frac{r_j}{r_i}(\vec{O}_i - \vec{E}_{ij}) = \vec{O}_j$, skąd

$$(r_j - r_i)\,\vec{E}_{ij} = r_j\vec{O}_i - r_i\vec{O}_j.$$

Mnożymy równości dla par $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$ odpowiednio przez r_3, r_1, r_2 i dodajemy:

$$\begin{aligned} &r_3(r_2 - r_1)\vec{E}_{12} + r_1(r_3 - r_2)\vec{E}_{23} + r_2(r_1 - r_3)\vec{E}_{31} \\ &\quad = r_2r_3\vec{O}_1 - r_1r_3\vec{O}_2 + r_1r_3\vec{O}_2 - r_1r_2\vec{O}_3 + r_1r_2\vec{O}_3 - r_2r_3\vec{O}_1 = \vec{0}. \end{aligned}$$

Współczynniki $\alpha = r_3(r_2 - r_1)$, $\beta = r_1(r_3 - r_2)$, $\gamma = r_2(r_1 - r_3)$ są niezerowe i $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Zatem $\vec{E}_{31} = \frac{\alpha\vec{E}_{12} + \beta\vec{E}_{23}}{\alpha+\beta}$ — punkt E_{31} jest kombinacją afiniczną E_{12} i E_{23}, więc leży na prostej $E_{12}E_{23}$. $\blacksquare$

Zadanie 14 (twierdzenie Cevy; punkty Gergonne'a i Nagela)**.** Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Wywnioskuj, że proste łączące wierzchołki z punktami styczności okręgu wpisanego (odpowiednio: dopisanych) z przeciwległymi bokami przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Oznaczmy $x = \frac{BD}{DC}$, $y = \frac{CE}{EA}$, $z = \frac{AF}{FB}$. We współrzędnych barycentrycznych $D = (0 : 1 : x)$, $E = (y : 0 : 1)$, $F = (1 : z : 0)$. Prosta AD to punkty z $p_2 : p_3 = 1 : x$, prosta BE — punkty z $p_1 : p_3 = y : 1$, prosta CF — punkty z $p_1 : p_2 = 1 : z$. Przecięciem AD i BE jest $S = (xy : 1 : x)$. Leży on na CF wtedy i tylko wtedy, gdy $xy : 1 = 1 : z$, czyli $xyz = 1$.

Punkt Gergonne'a. Odcinki styczne mają długości $BD = BF = s - b$, $CD = CE = s - c$, $AE = AF = s - a$, gdzie s to połowa obwodu. Iloczyn wynosi $\frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} \cdot \frac{s-a}{s-b} = 1$.

Punkt Nagela. Dla okręgów dopisanych $BD = s - c$, $DC = s - b$, $CE = s - a$, $EA = s - c$, $AF = s - b$, $FB = s - a$, i znów iloczyn $\frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} = 1$. ■

Zamiast zakończenia

Można powiedzieć, że w żadnym z tych dowodów nie było pomysłu. To nieprawda. Pomysł był zawsze ten sam i zawsze przychodził na początku: *gdzie postawić układ współrzędnych.* Okrąg opisany jako okrąg jednostkowy; środek cięciwy w początku układu; dwusieczna jako oś x; środek okręgu opisanego jako początek wektorów. Po tej jednej decyzji reszta była już tylko staranną arytmetyką.

Na olimpiadzie warto pamiętać o dwóch rzeczach. Po pierwsze: zanim zaczniesz liczyć, zapisz, co chcesz otrzymać — „ta liczba ma być rzeczywista", „te dwie odległości mają być równe". Rachunek bez celu jest najdłuższą drogą donikąd. Po drugie: sprawdzaj wynik na przypadku szczególnym (trójkąt równoboczny, prostokątny, równoramienny). Błąd znaku wychodzi wtedy od razu, a nie na ostatniej stronie.

Kącik nie będzie jednak wyłącznie geometryczny. W kolejnych odcinkach: nierówności i równania funkcyjne, kombinatoryka (zasada ekstremum, niezmienniki, zliczanie na dwa sposoby), teoria liczb (reszty kwadratowe, rzędy, równania diofantyczne) — a w geometrii współrzędne barycentryczne na poważnie i inwersja w liczbach zespolonych. Rozwiązania — zwłaszcza te „brzydkie, ale działające" — można zgłaszać przez stronę czasopisma.