Asymptote

05 / 2026

czasopismo o matematyce, literaturze i ideach

Eseje

Maria Świderska
Przekątna

Poezja matematyczna

Rafał Damianowski
Limeryki o dwójce

Proza

Adam Krakowiak
Równanie domowe

Kącik Olimpijczyka

Karol Tomczak
Rachunek zamiast natchnienia

ISSN 3072-4929

Redakcja: Ksawery Tomczak, Dorota Tomczak
Wydawca: Asymptote (projekt niezależny)
Kontakt: redakcja@asymptote.pl
https://asymptote.pl/

Licencja: Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY 4.0) · Open Access

© 2026 Asymptote

Spis treści

Manifest **ii**

Eseje **1**
Maria Świderska — Przekątna 1

Poezja matematyczna **3**
Rafał Damianowski — Limeryki o dwójce 3

Proza **4**
Adam Krakowiak — Równanie domowe 4

Kącik Olimpijczyka **6**
Karol Tomczak — Rachunek zamiast natchnienia 6

Informacje wydawnicze **14**

Manifest

Matematyka zwykle przedstawiana jest jako coś domkniętego: zestaw reguł, wyników i procedur, które prowadzą od pytania do odpowiedzi. Ale to tylko jej powierzchnia. Pod spodem istnieje coś innego — sposób myślenia, język precyzji i nieprecyzji jednocześnie, przestrzeń, w której idee nabierają kształtu, zanim jeszcze staną się „wynikiem".

„Asymptote" powstaje z przekonania, że matematyka nie jest wyłącznie techniką rozwiązywania zadań, lecz formą kultury. Ma historię, estetykę, filozofię i własne napięcia. Bywa piękna nie dlatego, że prowadzi do użytecznych rezultatów, ale dlatego, że potrafi ujawniać struktury myślenia, których inaczej nie widać.

Interesuje nas matematyka, która wychodzi poza szkolną narrację. Matematyka jako doświadczenie intelektualne — czasem czyste i klarowne, czasem niepokojąco abstrakcyjne, a czasem zaskakująco bliskie literaturze, sztuce czy filozofii.

Nie szukamy wyłącznie ścisłości, jeśli miałaby ona tłumić myślenie. Szukamy raczej precyzji, która otwiera przestrzeń, zamiast ją zamykać.

„Asymptote" nie jest podręcznikiem, kursem ani zbiorem zadań. Jest przestrzenią dla tekstów, które traktują matematykę poważnie, ale nie redukują jej do narzędzia.

Matematyka nie kończy się tam, gdzie kończą się obliczenia.

Eseje

Esej

Przekątna

O liście, której nie da się skończyć

Maria Świderska

Streszczenie. Esej opowiada o dowodzie przekątniowym Cantora z 1891 roku: żadna lista, choćby nieskończona, nie zawiera wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału od zera do jedynki. Autorka odtwarza rozumowanie krok po kroku, wyjaśnia, dlaczego w konstrukcji używa się wyłącznie cyfr pięć i sześć, i zestawia je z przeliczalnością liczb wymiernych oraz z miarą zero z poprzedniego eseju o „prawie wszędzie". Z matematyki przechodzi do pytania o to, co znaczy spisać wszystko — i dlaczego dowód, który niczego nie buduje, a tylko wskazuje lukę, bywa jednym z najmocniejszych.

Na trzecim roku, w sali bez okien, profesor od teorii mnogości poprosił nas o rzecz nietypową. Mieliśmy wyobrazić sobie listę. Nie krótką — nieskończoną, numerowaną: pierwsza liczba, druga liczba, trzecia, i tak dalej, bez końca. Na tej liście ma się znaleźć każda liczba rzeczywista z przedziału od zera do jedynki, zapisana w postaci rozwinięcia dziesiętnego. „Nie musicie jej kończyć — powiedział. — Wystarczy, że zgodzicie się, że da się ją ułożyć".

Nikt się nie sprzeciwił. Wydawało się to rozsądne. Liczb wymiernych jest nieskończenie wiele, a przecież dało się je ponumerować: jeden i pół, jedna trzecia, dwie trzecie, jedna czwarta, i tak dalej, porządnie, w kolejności rosnących mianowników. Dlaczego z rzeczywistymi miałoby być inaczej?

Wtedy profesor napisał na tablicy pierwszą liczbę z naszej listy, potem drugą, trzecią, aż do piątej, jedną pod drugą, w kolumnie. Zaczął podkreślać cyfry. Pierwszą cyfrę po przecinku w pierwszej liczbie. Drugą cyfrę w drugiej. Trzecią w trzeciej. Podkreślenia układały się w ukośną linię, w przekątną.

„Teraz — powiedział — zbudujemy nową liczbę. Pierwsza cyfra po przecinku będzie inna niż pierwsza cyfra pierwszej liczby. Druga cyfra — inna niż druga cyfra drugiej. Trzecia — inna niż trzecia cyfra trzeciej". Odwrócił się do nas. „Gdzie ona jest na naszej liście?".

Odpowiedź przychodziła powoli, jak światło, które dociera z daleka. Nigdzie. Nowa liczba różni się od pierwszej na pierwszym miejscu po przecinku, od drugiej na drugim, od setnej na setnym. Od każdej liczby z listy różni się co najmniej jedną cyfrą. A skoro każda liczba jest na liście, to tej nowej na liście nie ma. A przecież też jest liczbą z przedziału od zera do jedynki.

To jest cały dowód. Nie trzeba do niego niczego więcej: ani wzorów, ani granic, ani całek. Jest w nim tylko jedno pomysłowe posunięcie — zamiast szukać liczby, której na liście brakuje, wystarczy ją zbudować z samej listy, kawałek po kawałku, wbrew każdej pozycji z osobna.

Jest jedna pułapka i profesor, zanim ktoś ją wskazał, sam o niej wspomniał. Liczby dziesiętne bywają zapisywane na dwa sposoby: zero przecinek pięć to to samo co zero przecinek cztery dziewięć dziewięć dziewięć, bez końca. Gdyby nowa liczba zakończyła się nieskończonym ciągiem dziewiątek, mogłaby okazać się tą samą liczbą co któraś z listy, tylko zapisaną inaczej. Dlatego w konstrukcji używa się tylko cyfr pięć i sześć: jeżeli cyfra na przekątnej jest różna od pięć, zapisujemy pięć, a jeżeli równa pięć — zapisujemy sześć. Taka liczba nie ma dwóch zapisów, więc różnica na jednym miejscu rzeczywiście oznacza różnicę liczb.

Wyszłam z tych zajęć z dziwnym uczuciem, że ktoś mi coś zabrał i coś dał jednocześnie. Zabrał spokój, bo nieskończoność przestała być jedna. Zbiór liczb naturalnych jest nieskończony. Zbiór liczb wymiernych też. Ale liczb rzeczywistych jest, jak to się mówi, „więcej" — w ścisłym

sensie, że nie da się ich ułożyć w ciąg. Dał natomiast wrażenie, że w matematyce istnieją dowody, które nie wyjaśniają, tylko wyznaczają granicę: tutaj kończą się listy.

Pisałam kiedyś o tym, że zbiór liczb wymiernych ma miarę zero. Z punktu widzenia długości jest pomijalny, a z punktu widzenia numerowania — idealny. Z liczbami rzeczywistymi jest odwrotnie: wypełniają prostą bez reszty, ale nie dają się ułożyć w żaden ciąg. Przeliczalność i miara to dwa różne sposoby pytania „ile", i matematyka nie obiecuje, że odpowiedzi się zgadzają.

Zostało jeszcze jedno pytanie, najbardziej niepokojące. Czy między liczbą elementów zbioru liczb naturalnych a liczbą elementów zbioru liczb rzeczywistych istnieje jeszcze coś pośredniego? Cantor sądził, że nie, i nie umiał tego udowodnić. Dopiero wiele lat później okazało się — dzięki pracom Gödla i Cohena — że przy zwykłych aksjomatach teorii mnogości nie da się tego ani udowodnić, ani obalić. Pytanie zostało więc, jak lista, której nie da się skończyć.

Do dziś lubię patrzeć na przekątną. Jest w niej coś z uczciwości: dowód nie twierdzi, że wie, jakiej liczby brakuje na liście. Twierdzi tylko, że jeśli ktoś pokaże mi listę, ja zawsze potrafię z niej zrobić liczbę, której na niej nie ma. Nie pokazuję palcem, gdzie jest luka. Pokazuję tylko, że luka jest wszędzie, gdzie ktoś uzna, że już wszystko spisał.

Poezja matematyczna

Wiersz

Limeryki o dwójce

Rafał Damianowski

Streszczenie. Pięć limeryków o liczbie dwa: o jedynej parzystej liczbie pierwszej, o parze i połowie, o podwajaniu, o zapisie dwójkowym i o niewymierności pierwiastka z dwóch. Żartobliwa forma służy przypomnieniu, że najmniejsza liczba pierwsza jest zarazem najbardziej niezwykła.

I. Wyjątek

Pewna dwójka, jedyny wyjątek,
wśród pierwszych miała początek.
Za nią same nieparzyste,
zimne i uroczyste —
parzysta, a pierwsza. Taki to wątek.

II. Połowa

Dwójka lubi mieć drugą stronę,
bo w parze czuje się spełnioną.
Gdy dzielisz ją na pół,
zostaje po niej puls —
jedynka, już samotną, już straconą.

III. Podwajanie

Dwójka lubi podwajać się lekko:
po dziesięciu krokach tysiąc, to jeszcze niedaleko;
po dwudziestu — milion,
po trzydziestu — miliard,
i tak, nie zauważysz, jak zajdzie daleko.

IV. System

Zapytano komputer, ile to dwa,
a on na to: „Dziesięć”. I trwa
przy swoim, bo w jego świecie
palców tylko dwa — i wiecie,
że jedynka i zero to wszystko, co ma.

V. Przekątna

Na kwadracie o boku jedynkowym
przekątna wyszła z pierwiastkiem dwójkowym —
i nikt jej nie zmierzył
ułamkiem, choć wierzył,
bo ona jest, mówiąc najkrócej, niewymiernym.

Proza

Opowiadanie

Równanie domowe

Adam Krakowiak

Streszczenie. Dalszy ciąg historii wiejskiego nauczyciela i szkolnego Koła. Kuba przynosi z zeszytu kuzynki równanie kwadratowe, którego nie rozumie, a narrator umie tylko jedno: wzory Viète'a. Okazuje się, że pierwiastki równania, o którym wiadomo tylko, ile wynosi ich suma i iloczyn, to cztery i pięć — tyle, ile klas, które od września mają siedzieć razem. Opowiadanie jest o tym, że bywają liczby, które znaczą coś dopiero we dwie.

Kuba przyszedł w czwartek z kartką wyrwaną z cudzego zeszytu. Powiedział, że to od kuzynki z liceum, że ona to rozumie, a on nie, i że jeśli ja to rozumiem, to on też będzie. Na kartce było napisane ołówkiem:

$$x^2 - 9x + 20 = 0.$$

Nie jestem matematykiem. Mówię to dzieciom od początku, żeby nie było nieporozumień. Jestem polonistą, który kiedyś kupił na wyprzedaży podręcznik do liceum i czytał go przez trzy zimy. Zostało mi z niego kilka rzeczy, których się nie zapomina, bo nie da się ich zapamiętać inaczej niż przez zrozumienie. Jedną z nich są wzory Viète'a.

Powiedziałem im tak: zapomnijcie, że to równanie. Wyobraźcie sobie, że ktoś ukrył dwie liczby i podał o nich tylko dwa fakty. Pierwszy: razem dają dziewięć. Drugi: pomnożone przez siebie dają dwadzieścia. Kto znajdzie te liczby?

Dzieci nie lubią, kiedy nauczyciel mówi „ktoś ukrył". Nasłuchują wtedy, czy to zagadka, czy podstęp. Tym razem to była zagadka. Zaczęli zgadywać. Jeden i osiem: razem dziewięć, ale iloczyn tylko osiem. Dwa i siedem: czternaście. Trzy i sześć: osiemnaście, blisko. Wiktoria, która nie odzywała się do tej pory, powiedziała cicho: „Cztery i pięć".

Sprawdziliśmy. Cztery i pięć to dziewięć. Cztery razy pięć to dwadzieścia. Kuba spojrzał na swoją kartkę, potem na mnie. „To są pierwiastki?" — zapytał. „To są pierwiastki" — powiedziałem. — „Wzory Viète'a mówią, że w równaniu kwadratowym suma pierwiastków to liczba przy iksie ze zmienionym znakiem, a iloczyn to wyraz wolny. Nie musisz liczyć delty. Wystarczy, że znasz sumę i iloczyn".

Wtedy Kuba powiedział coś, czego się nie spodziewałem. „Czwarta i piąta" — powiedział. Nikt się nie roześmiał. Pismo z gminy leżało nadal w szufladzie biurka, tej, która się nie domyka, i wszyscy wiedzieli, co w nim jest. Od września klasy czwarta i piąta będą razem. Cztery i pięć. Razem dziewięć. A pomnożone — dwadzieścia, tyle, ile będzie dzieci w jednej sali, jeśli się jakoś zmieszczą.

Zapytał jeszcze: „A który jest pierwszy?". Zrozumiałem, że nie pyta o liczby. „Ten mniejszy" — powiedziałem. — „W równaniu pierwiastki zapisuje się jako x_1 i x_2, ale tylko dlatego, że trzeba je jakoś nazwać. Równanie nie wie, który jest pierwszy. Zamień je miejscami: suma ta sama, iloczyn ten sam, równanie to samo. Dopóki są razem, nie ma między nimi kolejności".

Zapisałem to potem w zeszycie, w którym zapisuję rzeczy, których nie umiem jeszcze zrozumieć: że dwa pierwiastki równania nie są dwiema osobnymi odpowiedziami, tylko jedną odpowiedzią z dwoma końcami. Gdyby usunąć jeden, drugiego nie dałoby się znaleźć. Znamy je tylko przez to, co robią razem.

Ola z szóstej, która teraz jest już w liceum i czasem zagląda do nas w czwartki, usłyszała końcówkę rozmowy od progu. „To ja też miałam z tego sprawdzian" — powiedziała. — „Ale nikt

mi nie powiedział, że to jest o szkole". Nie odpowiedziałem, że to nie jest o szkole. Myślę, że była to jedna z tych sytuacji, w których nauczyciel powinien milczeć.

We wrześniu będzie dwadzieścioro dzieci w jednej sali. Gmina miała rację co do liczb, liczby zwykle mają rację. Ja będę robił to, co umiem: rysował na tablicy równanie, o którym wiadomo tylko, ile wynosi suma i iloczyn jego pierwiastków, i patrzył, jak ktoś, kto o tym dotąd nie wiedział, mówi „cztery i pięć".

Kuba zabrał kartkę. Zapytałem, czy chce ją zostawić. Powiedział, że nie, że pokaże kuzynce. Zapytałem, co jej powie. Zastanowił się dłuższą chwilę, jak ktoś, kto ma coś ważnego do wyjaśnienia i wie, że nie ma na to dobrych słów.

„Powiem jej — odpowiedział — że to równanie ma dwoje ludzi".

Kącik Olimpijczyka

Kącik Olimpijczyka

Rachunek zamiast natchnienia

Analityczne dowody olimpijskich zadań geometrycznych

Karol Tomczak

Streszczenie. Pierwszy odcinek nowego działu poświęconego matematyce olimpijskiej — algebrze, kombinatoryce, teorii liczb i geometrii. Na początek geometria: autor zbiera kilkanaście klasycznych twierdzeń i zadań olimpijskich z geometrii — od prostej Eulera i prostej Simsona, przez twierdzenia Napoleona, Brahmagupty, Monge'a i o motylku, po zadania z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej z lat 2007 i 2008 — i dowodzi ich wyłącznie metodami analitycznymi: liczbami zespolonymi na okręgu jednostkowym, współrzędnymi kartezjańskimi, rachunkiem wektorowym i współrzędnymi barycentrycznymi. Każdy dowód jest kompletny; wszystkie potrzebne wzory pomocnicze zostały wyprowadzone na początku.

Zamiast wstępu

Każdy, kto pisał olimpiadę, zna ten moment. Rysunek jest piękny, teza ewidentna, cyrkiel odłożony, a syntetycznego pomysłu — brak. Wtedy zostają dwie drogi: czekać na natchnienie albo liczyć. Ten dział jest o drugiej drodze.

Dowody analityczne mają złą prasę. Mówi się, że są „brzydkie", że „nic nie wyjaśniają", że to „bashowanie". Częściowo słusznie: rachunek rzadko pokazuje, *dlaczego* coś zachodzi. Ale ma jedną zaletę, której nie ma żadna inna metoda — *zawsze się kończy.* Nie wymaga szczęścia, tylko porządku. A dobrze dobrany układ współrzędnych potrafi być równie elegancki jak najsprytniejsza konstrukcja pomocnicza. W tym odcinku spróbuję to pokazać na kilkunastu przykładach.

Najpierw skrzynka z narzędziami. Potem zadania — od klasyki po Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną.

Skrzynka z narzędziami

Liczby zespolone na okręgu jednostkowym. Punkty oznaczamy małymi literami odpowiadającymi wielkim: punktowi A odpowiada liczba zespolona a. Jeśli trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O, przyjmujemy $o = 0$ i promień 1. Wtedy dla każdego punktu okręgu

$$|a| = 1 \iff a\overline{a} = 1 \iff \overline{a} = \frac{1}{a}.$$

To jedno zdanie jest silnikiem całej metody: sprzężenie punktu na okręgu jest jego odwrotnością, więc rachunki na sprzężeniach stają się rachunkami na ułamkach. W szczególności dla $|a| = |b| = 1$:

$$\overline{a - b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{a - b}{ab}.$$

Kryteria. Dla różnych punktów P, Q, R:

- P, Q, R są współliniowe $\iff \dfrac{p-q}{p-r} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{p-q}{p-r} = \overline{\left(\dfrac{p-q}{p-r}\right)}$;

- $PQ \perp RS \iff \dfrac{p-q}{r-s} \in i\mathbb{R} \iff \dfrac{p-q}{r-s} = -\overline{\left(\dfrac{p-q}{r-s}\right)}$.

Lemat 1 (rzut prostokątny na cięciwę)**.** Niech $|a| = |b| = 1$, $a \neq b$. Rzut prostokątny punktu z na prostą AB to

$$f = \frac{1}{2}\big(a + b + z - ab\,\overline{z}\big).$$

Dowód. Punkt f leży na AB, więc $\frac{f-a}{b-a}$ jest rzeczywiste. Ze wzoru $\overline{b-a} = -\frac{b-a}{ab}$ dostajemy

$$\frac{f-a}{b-a} = \frac{\overline{f}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}} = -ab\,\frac{\overline{f}-\frac{1}{a}}{b-a}, \qquad \text{czyli} \qquad f + ab\,\overline{f} = a + b.$$

Odcinek ZF jest prostopadły do AB, więc $\frac{z-f}{b-a}$ jest czysto urojone:

$$\frac{z-f}{b-a} = -\frac{\overline{z}-\overline{f}}{\overline{b}-\overline{a}} = ab\,\frac{\overline{z}-\overline{f}}{b-a}, \qquad \text{czyli} \qquad f - ab\,\overline{f} = z - ab\,\overline{z}.$$

Dodając oba równania, otrzymujemy $2f = a + b + z - ab\,\overline{z}$. ■

Lemat 2 (przecięcie stycznych)**.** Styczne do okręgu jednostkowego w punktach A i B ($a \neq \pm b$) przecinają się w punkcie

$$t = \frac{2ab}{a+b}.$$

Dowód. Styczna w A jest prostopadła do promienia OA, więc $\frac{t-a}{a}$ jest czysto urojone: $\frac{t}{a} - 1 + a\overline{t} - 1 = 0$, tj. $\frac{t}{a} + a\overline{t} = 2$. Analogicznie $\frac{t}{b} + b\overline{t} = 2$. Z pierwszego równania $\overline{t} = \frac{2a-t}{a^2}$; po wstawieniu do drugiego

$$\frac{t}{b} + \frac{b(2a-t)}{a^2} = 2 \iff t \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2 b} = \frac{2(a-b)}{a} \iff t = \frac{2ab}{a+b}.$$ ■

Lemat 3 (ortocentrum)**.** Jeśli $|a| = |b| = |c| = 1$, to ortocentrum trójkąta ABC to $h = a + b + c$.

Dowód. Mamy $\frac{h-a}{b-c} = \frac{b+c}{b-c}$, a

$$\overline{\left(\frac{b+c}{b-c}\right)} = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}} = \frac{c+b}{c-b} = -\frac{b+c}{b-c},$$

więc liczba ta jest czysto urojona, tj. $AH \perp BC$. Z symetrii $BH \perp CA$, zatem H jest ortocentrum. ■

Wektory. Środek okręgu opisanego bierzemy za początek układu, wektory oznaczamy jak punkty: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$, przy czym $|\vec{A}| = |\vec{B}| = |\vec{C}| = R$. Lemat 3 w wersji wektorowej (twierdzenie Sylvestera) brzmi: $\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ — dowód jest ten sam: $(\vec{H} - \vec{A}) \cdot (\vec{B} - \vec{C}) = |\vec{B}|^2 - |\vec{C}|^2 = 0$.

Współrzędne barycentryczne. Punkt P płaszczyzny zapisujemy jako $(\alpha : \beta : \gamma)$, jeśli $(\alpha+\beta+\gamma)\vec{P} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}$. Punkt na boku BC dzielący go w stosunku $BD : DC = p : q$ ma współrzędne $(0 : q : p)$, a prosta AD to zbiór punktów $(t : q : p)$, $t \in \mathbb{R}$ — czyli tych, w których stosunek drugiej współrzędnej do trzeciej jest równy $q : p$.

Zadania

Zadanie 1 (prosta Eulera)**.** Udowodnij, że środek okręgu opisanego O, środek ciężkości G i ortocentrum H dowolnego trójkąta leżą na jednej prostej oraz $OH = 3\,OG$.

Dowód. Na okręgu jednostkowym $o = 0$, $g = \frac{a+b+c}{3}$, a z lematu 3 $h = a + b + c$. Zatem $h = 3g$, czyli $\vec{OH} = 3\,\vec{OG}$: punkty są współliniowe i $OH = 3\,OG$. ■

Zadanie 2 (odbicia ortocentrum)**.** Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC, a M środkiem boku BC. Udowodnij, że:

1. obraz H w symetrii względem prostej BC leży na okręgu opisanym na ABC;
2. obraz H w symetrii względem punktu M jest punktem okręgu opisanego diametralnie przeciwległym do A.

Dowód. (1) Obraz z' punktu z w symetrii względem BC to $2f - z$, gdzie f jest rzutem z lematu 1: $z' = b + c - bc\,\overline{z}$. Dla $z = h$ mamy $\overline{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, więc

$$h' = b + c - bc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = b + c - \frac{bc}{a} - c - b = -\frac{bc}{a},$$

a $\left|-\frac{bc}{a}\right| = 1$.

(2) Symetria względem M: $h'' = 2m - h = (b + c) - (a + b + c) = -a$. To punkt okręgu jednostkowego diametralnie przeciwległy do a. ■

Zadanie 3 (okrąg dziewięciu punktów)**.** Udowodnij, że środki boków trójkąta, spodki jego wysokości oraz środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami leżą na jednym okręgu, którego promień jest połową promienia okręgu opisanego.

Dowód. Niech $n = \frac{a+b+c}{2}$. Pokażemy, że każdy z dziewięciu punktów jest odległy od n o $\frac{1}{2}$. Z symetrii wystarczy rozważyć punkty związane z wierzchołkiem A i bokiem BC.

- Środek BC: $\left|\frac{b+c}{2} - n\right| = \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
- Środek AH: $\frac{a+h}{2} = \frac{2a+b+c}{2}$, więc $\left|\frac{2a+b+c}{2} - n\right| = \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
- Spodek wysokości z A: z lematu 1 (dla $z = a$, $\overline{a} = \frac{1}{a}$) jest to $d = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{bc}{a}\right)$, zatem $|d - n| = \frac{1}{2}\left|\frac{bc}{a}\right| = \frac{1}{2}$. ■

Zadanie 4 (prosta Simsona)**.** Niech P będzie punktem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że rzuty prostokątne punktu P na proste BC, CA, AB są współliniowe.

Dowód. Ponieważ $\overline{p} = \frac{1}{p}$, z lematu 1 rzuty to

$$d = \tfrac{1}{2}\left(p + b + c - \tfrac{bc}{p}\right), \quad e = \tfrac{1}{2}\left(p + c + a - \tfrac{ca}{p}\right), \quad f = \tfrac{1}{2}\left(p + a + b - \tfrac{ab}{p}\right).$$

Stąd

$$e - d = \frac{(a-b)(p-c)}{2p}, \qquad f - d = \frac{(a-c)(p-b)}{2p}, \qquad \frac{e-d}{f-d} = \frac{(a-b)(p-c)}{(a-c)(p-b)}.$$

Sprzężenie tej liczby, po zastąpieniu każdego $\overline{x}$ przez $\frac{1}{x}$ i pomnożeniu licznika i mianownika przez $abcp$, wynosi

$$\frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{\frac{b-a}{ab} \cdot \frac{c-p}{pc}}{\frac{c-a}{ac} \cdot \frac{b-p}{pb}} = \frac{(b-a)(c-p)}{(c-a)(b-p)} = \frac{(a-b)(p-c)}{(a-c)(p-b)}.$$

Liczba jest równa swojemu sprzężeniu, więc jest rzeczywista: D, E, F są współliniowe. ■

Zadanie 5 (nierówność i twierdzenie Ptolemeusza)**.** Udowodnij, że dla dowolnych punktów A, B, C, D płaszczyzny

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

przy czym równość zachodzi dla każdego czworokąta wypukłego $ABCD$ wpisanego w okrąg.

Dowód. Bezpośrednie wymnożenie daje tożsamość (tym razem dla dowolnych liczb zespolonych)

$$(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) + (a-d)(b-c).$$

Biorąc moduły i stosując nierówność trójkąta $|u+v| \leq |u| + |v|$, dostajemy tezę. Równość w nierówności trójkąta zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{u}{v}$ jest dodatnią liczbą rzeczywistą, tutaj

$$\frac{u}{v} = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} = -\frac{b-a}{d-a} \cdot \frac{d-c}{b-c}.$$

Argumenty czynników $\frac{b-a}{d-a}$ i $\frac{d-c}{b-c}$ to kąty skierowane $\measuredangle DAB$ i $\measuredangle BCD$. Liczba $\frac{u}{v}$ jest dodatnia dokładnie wtedy, gdy te kąty sumują się do π (modulo 2π) — a to dla czworokąta wypukłego $ABCD$ oznacza $\angle A + \angle C = \pi$, czyli wpisywalność w okrąg. ■

Zadanie 6 (symedianna)**.** Styczne do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punktach B i C przecinają się w punkcie T. Niech M będzie środkiem boku BC. Udowodnij, że proste AT i AM są symetryczne względem dwusiecznej kąta BAC.

Dowód. Proste AX i AY są symetryczne względem dwusiecznej kąta BAC wtedy i tylko wtedy, gdy $\measuredangle(AB, AX) = \measuredangle(AY, AC)$, czyli gdy argumenty liczb $\frac{x-a}{b-a}$ oraz $\frac{c-a}{y-a}$ są równe modulo π, tj.

$$W = \frac{(x-a)(y-a)}{(b-a)(c-a)} \in \mathbb{R}.$$

Bierzemy $x = m = \frac{b+c}{2}$ i — z lematu 2 — $y = t = \frac{2bc}{b+c}$:

$$m - a = \frac{b+c-2a}{2}, \qquad t - a = \frac{2bc-ab-ac}{b+c}, \qquad W = \frac{(b+c-2a)(2bc-ab-ac)}{2(b+c)(b-a)(c-a)}.$$

Liczymy sprzężenia czynników:

$$\overline{b+c-2a} = -\frac{2bc-ab-ac}{abc}, \qquad \overline{2bc-ab-ac} = -\frac{b+c-2a}{abc},$$
$$\overline{b+c} = \frac{b+c}{bc}, \qquad \overline{(b-a)(c-a)} = \frac{(b-a)(c-a)}{a^2bc}.$$

Zatem

$$\overline{W} = \frac{\dfrac{(b+c-2a)(2bc-ab-ac)}{a^2b^2c^2}}{2 \cdot \dfrac{b+c}{bc} \cdot \dfrac{(b-a)(c-a)}{a^2bc}} = \frac{(b+c-2a)(2bc-ab-ac)}{2(b+c)(b-a)(c-a)} = W,$$

czyli $W \in \mathbb{R}$, co kończy dowód. ■

Zadanie 7. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < AC$. Punkt M jest środkiem odcinka AB, a punkt N — środkiem odcinka AC. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie CMN. Okrąg ten przecina prostą BC ponownie w punkcie P różnym od C. Punkt Q wybrano tak, że proste QP i QN są styczne do Ω. Wykazać, że miary kątów QAM i QMA są równe.

Dowód. Wystarczy wykazać, że $QA = QM$ — wtedy trójkąt QAM jest równoramienny i kąty przy podstawie AM są równe.

Tym razem okręgiem jednostkowym czynimy nie okrąg opisany na ABC, lecz Ω: niech $|c| = |m| = |n| = |p| = 1$. Ponieważ N i M są środkami odcinków AC i AB,

$$a = 2n - c, \qquad b = 2m - a = 2m - 2n + c.$$

Punkt P. Mamy $b - c = 2(m - n)$, więc $BC \parallel MN$ (to po prostu twierdzenie o linii środkowej). Cięciwy CP i MN okręgu Ω są zatem równoległe, czyli $\frac{c-p}{m-n} \in \mathbb{R}$. Ze wzoru $\overline{x-y} = -\frac{x-y}{xy}$ dla $|x| = |y| = 1$:

$$\overline{\left(\frac{c-p}{m-n}\right)} = \frac{-\frac{c-p}{cp}}{-\frac{m-n}{mn}} = \frac{c-p}{m-n} \cdot \frac{mn}{cp},$$

a ponieważ $c \neq p$, równość tej liczby z jej sprzężeniem oznacza $cp = mn$, tj.

$$p = \frac{mn}{c}.$$

Punkt Q. Z lematu 2 (styczne do Ω w P i N; zakładamy, jak w treści, że punkt Q istnieje, czyli $p \neq -n$, równoważnie $m + c \neq 0$):

$$q = \frac{2pn}{p+n} = \frac{2\,\frac{mn^2}{c}}{\frac{n(m+c)}{c}} = \frac{2mn}{m+c}.$$

Odległości. Liczymy

$$q - m = \frac{2mn - m^2 - mc}{m+c} = -\frac{m\,(m+c-2n)}{m+c},$$
$$q - a = \frac{2mn - (2n-c)(m+c)}{m+c} = \frac{c\,(m+c-2n)}{m+c}.$$

Zatem

$$q - a = -\frac{c}{m}\,(q - m),$$

a ponieważ $\left|\frac{c}{m}\right| = 1$, otrzymujemy $|q-a| = |q-m|$, czyli $QA = QM$. Stąd $\angle QAM = \angle QMA$. ■

Komentarz. Cały dowód rozstrzyga wybór okręgu jednostkowego: gdy jest nim Ω, punkty A i B wyrażają się liniowo przez c, m, n, a warunek $BC \parallel MN$ daje od razu położenie P. Warunek $AB < AC$ zapewnia jedynie niezdegenerowanie konfiguracji (m.in. $P \neq C$).

Zadanie 8 (twierdzenie Napoleona)**.** Na bokach trójkąta ABC zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne. Udowodnij, że ich środki są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

Dowód. Niech $\omega = e^{2\pi i/3}$; wtedy $\omega^3 = 1$ i $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

Lemat. Trójkąt PQR jest równoboczny i dodatnio zorientowany wtedy i tylko wtedy, gdy $p + \omega q + \omega^2 r = 0$. Istotnie, wobec $1 + \omega + \omega^2 = 0$ warunek ten jest równoważny $(p - r) + \omega(q - r) = 0$, czyli $p - r = e^{-i\pi/3}(q - r)$: punkt P powstaje z Q przez obrót o kąt -60° wokół R, więc $RP = RQ$, $\angle PRQ = 60^\circ$, a obieg $P \to Q \to R$ jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

Niech ABC będzie zorientowany dodatnio. Trójkąt równoboczny zbudowany na zewnątrz na boku BC ma wierzchołki C, B, A' w orientacji dodatniej, więc $c + \omega b + \omega^2 a' = 0$, skąd $a' = -\omega c - \omega^2 b$. Jego środek to

$$x = \frac{b + c + a'}{3} = \frac{(1 - \omega^2)b + (1 - \omega)c}{3},$$

i cyklicznie $y = \frac{(1-\omega^2)c+(1-\omega)a}{3}$, $z = \frac{(1-\omega^2)a+(1-\omega)b}{3}$. Obliczamy współczynniki przy a, b, c w wyrażeniu $3(x + \omega y + \omega^2 z)$:

$$\begin{aligned} &\text{przy } a: && \omega(1-\omega) + \omega^2(1-\omega^2) = \omega - \omega^4 = 0, \\ &\text{przy } b: && (1-\omega^2) + \omega^2(1-\omega) = 1 - \omega^3 = 0, \\ &\text{przy } c: && (1-\omega) + \omega(1-\omega^2) = 1 - \omega^3 = 0. \end{aligned}$$

Zatem $x + \omega y + \omega^2 z = 0$ i z lematu trójkąt XYZ jest równoboczny. ■

Zadanie 9 (twierdzenie Brahmagupty)**.** Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg są prostopadłe i przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że prosta przechodząca przez P i prostopadła do AB przechodzi przez środek boku CD.

Dowód. Kładziemy $P = (0,0)$, przekątną AC na osi x, przekątną BD na osi y: $A = (a,0)$, $C = (c,0)$, $B = (0,b)$, $D = (0,d)$. Okrąg ma równanie $x^2 + y^2 + Ex + Fy + G = 0$. Jego przecięcie z osią x to pierwiastki równania $x^2 + Ex + G = 0$, więc ze wzorów Viète'a $ac = G$; analogicznie z osią y: $bd = G$. Zatem $ac = bd$.

Wektor $\vec{AB} = (-a, b)$, więc prosta przez P prostopadła do AB ma kierunek (b, a). Środek CD to $N = \left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right)$. Punkt N leży na prostej przechodzącej przez P w kierunku (b, a), bo

$$\det \begin{pmatrix} b & a \\ \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \end{pmatrix} = \frac{bd - ac}{2} = 0.$$

Prosta ta przecina CD w jednym punkcie (nie zawiera CD, bo $P \notin CD$), a N leży na obu — więc jest nim środek CD. ■

Zadanie 10 (twierdzenie o motylku)**.** Niech M będzie środkiem cięciwy PQ okręgu. Przez M poprowadzono dwie inne cięciwy AB i CD. Proste AD i BC przecinają prostą PQ w punktach X i Y. Udowodnij, że $MX = MY$.

Dowód. Niech $M = (0,0)$, a PQ leży na osi x. Okrąg: $x^2 + y^2 + Ex + Fy + G = 0$. Jego przecięcia z osią x, czyli P i Q, są pierwiastkami $x^2 + Ex + G = 0$; ponieważ M jest środkiem PQ, ich suma $-E$ jest zerem. Zatem okrąg to $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + Fy + G = 0$, przy czym $G < 0$ (bo M leży wewnątrz okręgu). Proste AB i CD to $y = sx$ i $y = tx$ ($s, t \neq 0$, bo cięciwy są różne od PQ).

Rozważmy pęk krzywych

$$\Gamma_\lambda: \ \Phi(x, y) + \lambda\,(y - sx)(y - tx) = 0.$$

Każda z nich przechodzi przez A, B, C, D. Wybierzmy na prostej AD punkt Z różny od A i D, nieleżący na prostych AB, CD. Wtedy $(y - sx)(y - tx) \neq 0$ w Z, więc istnieje λ, dla którego $Z \in \Gamma_\lambda$. Ograniczenie wielomianu stopnia 2 do prostej AD jest wielomianem stopnia co najwyżej 2 jednej zmiennej, który ma trzy pierwiastki (A, D, Z) — więc jest tożsamościowo zerowy, tzn. $\Gamma_\lambda \supseteq AD$ i lewa strona rozkłada się na iloczyn równania prostej AD i pewnego czynnika liniowego ℓ. Punkty B i C leżą na Γ_λ, a nie leżą na AD (trzy różne punkty okręgu nie są współliniowe), więc leżą na ℓ: $\Gamma_\lambda = AD \cup BC$.

Punkty X i Y leżą na Γ_λ i na osi x. Podstawiając $y = 0$:

$$(1 + \lambda st)\, x^2 + G = 0.$$

Ponieważ $G \neq 0$, mamy $1 + \lambda st \neq 0$, a oba punkty X, Y spełniają $x^2 = \frac{-G}{1+\lambda st}$. Zatem $|x_X| = |x_Y|$, czyli $MX = MY$. ■

Zadanie 11 (IMO 2007, zadanie 4)**.** Dwusieczna kąta BCA trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie ponownie w punkcie R, symetralną boku BC w punkcie P, a symetralną boku AC w punkcie Q. Punkt K jest środkiem boku BC, a L — środkiem boku AC. Udowodnij, że trójkąty RPK i RQL mają równe pola.

Dowód. Niech $C=(0,0)$, dwusieczna kąta C to oś x, $\theta=\frac{1}{2}\angle BCA\in(0,\frac{\pi}{2})$, $a=BC$, $b=CA$. Wtedy

$$A=b(\cos\theta,\sin\theta),\qquad B=a(\cos\theta,-\sin\theta),\qquad K=\tfrac{a}{2}(\cos\theta,-\sin\theta),\qquad L=\tfrac{b}{2}(\cos\theta,\sin\theta).$$

Punkt P. Szukamy $P=(p,0)$ z $PC=PB$: $p^2=(p-a\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta$, skąd $p=\frac{a}{2\cos\theta}$. Analogicznie $Q=\left(\frac{b}{2\cos\theta},0\right)$.

Punkt R. Okrąg opisany przechodzi przez początek układu, więc ma równanie $x^2+y^2+Ux+Vy=0$. Podstawiając A i B i dzieląc przez b oraz a:

$$b+U\cos\theta+V\sin\theta=0,\qquad a+U\cos\theta-V\sin\theta=0.$$

Dodając: $U=-\frac{a+b}{2\cos\theta}$. Drugi punkt przecięcia z osią x to $R=(-U,0)=\left(\frac{a+b}{2\cos\theta},0\right)$.

Pola. Punkty R, P, Q leżą na osi x, więc pole trójkąta to połowa podstawy razy odległość trzeciego wierzchołka od osi:

$$[RPK]=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2\cos\theta}-\frac{a}{2\cos\theta}\right)\cdot\frac{a}{2}\sin\theta=\frac{ab\tan\theta}{8},$$

$$[RQL]=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2\cos\theta}-\frac{b}{2\cos\theta}\right)\cdot\frac{b}{2}\sin\theta=\frac{ab\tan\theta}{8}.$$ ■

Zadanie 12 (IMO 2008, zadanie 1)**.** Trójkąt ostrokątny ABC ma ortocentrum H. Okrąg o środku w środku boku BC przechodzący przez H przecina prostą BC w punktach A_1 i A_2. Analogicznie określamy B_1,B_2 (dla boku CA) oraz C_1,C_2 (dla boku AB). Udowodnij, że punkty A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 leżą na jednym okręgu.

Dowód. Początek układu w środku okręgu opisanego O, promień R; z twierdzenia Sylvestera $\vec{H}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$. Niech $\vec{M}=\frac{\vec{B}+\vec{C}}{2}$ będzie środkiem BC. Ponieważ $OM\perp BC$, a A_1 leży na BC w odległości MH od M, z twierdzenia Pitagorasa

$$OA_1^2=OA_2^2=|\vec{M}|^2+|\vec{H}-\vec{M}|^2.$$

Liczymy, korzystając z $|\vec{A}|^2=|\vec{B}|^2=|\vec{C}|^2=R^2$:

$$|\vec{M}|^2=\frac{2R^2+2\vec{B}\cdot\vec{C}}{4}=\frac{R^2+\vec{B}\cdot\vec{C}}{2},$$

$$|\vec{H}-\vec{M}|^2=\left|\vec{A}+\tfrac{\vec{B}+\vec{C}}{2}\right|^2=R^2+\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})+\frac{R^2+\vec{B}\cdot\vec{C}}{2}.$$

Stąd

$$OA_1^2=2R^2+\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{C}+\vec{C}\cdot\vec{A}.$$

Wyrażenie jest symetryczne względem A,B,C, więc tę samą wartość mają $OB_1^2,OB_2^2,OC_1^2,OC_2^2$. Wszystkie sześć punktów leży na okręgu o środku O. ■

Zadanie 13 (twierdzenie Monge'a)**.** Dane są trzy okręgi o środkach O_1,O_2,O_3 i parami różnych promieniach r_1,r_2,r_3. Dla każdej pary okręgów niech E_{ij} będzie ich zewnętrznym środkiem jednokładności. Udowodnij, że punkty E_{12},E_{23},E_{31} są współliniowe.

Dowód. Jednokładność o środku E_{ij} i skali $\frac{r_j}{r_i}>0$ przeprowadza O_i na O_j: $\vec{E}_{ij}+\frac{r_j}{r_i}(\vec{O}_i-\vec{E}_{ij})=\vec{O}_j$, skąd

$$(r_j-r_i)\,\vec{E}_{ij}=r_j\vec{O}_i-r_i\vec{O}_j.$$

Mnożymy równości dla par $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$ odpowiednio przez r_3, r_1, r_2 i dodajemy:

$$\begin{aligned}&r_3(r_2-r_1)\vec{E}_{12}+r_1(r_3-r_2)\vec{E}_{23}+r_2(r_1-r_3)\vec{E}_{31}\\&\quad=r_2r_3\vec{O}_1-r_1r_3\vec{O}_2+r_1r_3\vec{O}_2-r_1r_2\vec{O}_3+r_1r_2\vec{O}_3-r_2r_3\vec{O}_1=\vec{0}.\end{aligned}$$

Współczynniki $\alpha = r_3(r_2 - r_1)$, $\beta = r_1(r_3 - r_2)$, $\gamma = r_2(r_1 - r_3)$ są niezerowe i $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Zatem $\vec{E}_{31} = \frac{\alpha\vec{E}_{12} + \beta\vec{E}_{23}}{\alpha+\beta}$ — punkt E_{31} jest kombinacją afiniczną E_{12} i E_{23}, więc leży na prostej $E_{12}E_{23}$. ■

Zadanie 14 (twierdzenie Cevy; punkty Gergonne'a i Nagela)**.** Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Wywnioskuj, że proste łączące wierzchołki z punktami styczności okręgu wpisanego (odpowiednio: dopisanych) z przeciwległymi bokami przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Oznaczmy $x = \frac{BD}{DC}$, $y = \frac{CE}{EA}$, $z = \frac{AF}{FB}$. We współrzędnych barycentrycznych $D = (0 : 1 : x)$, $E = (y : 0 : 1)$, $F = (1 : z : 0)$. Prosta AD to punkty z $p_2 : p_3 = 1 : x$, prosta BE — punkty z $p_1 : p_3 = y : 1$, prosta CF — punkty z $p_1 : p_2 = 1 : z$. Przecięciem AD i BE jest $S = (xy : 1 : x)$. Leży on na CF wtedy i tylko wtedy, gdy $xy : 1 = 1 : z$, czyli $xyz = 1$.

Punkt Gergonne'a. Odcinki styczne mają długości $BD = BF = s - b$, $CD = CE = s - c$, $AE = AF = s - a$, gdzie s to połowa obwodu. Iloczyn wynosi $\frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} \cdot \frac{s-a}{s-b} = 1$.

Punkt Nagela. Dla okręgów dopisanych $BD = s - c$, $DC = s - b$, $CE = s - a$, $EA = s - c$, $AF = s - b$, $FB = s - a$, i znów iloczyn $\frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} = 1$. ■

Zamiast zakończenia

Można powiedzieć, że w żadnym z tych dowodów nie było pomysłu. To nieprawda. Pomysł był zawsze ten sam i zawsze przychodził na początku: *gdzie postawić układ współrzędnych.* Okrąg opisany jako okrąg jednostkowy; środek cięciwy w początku układu; dwusieczna jako oś x; środek okręgu opisanego jako początek wektorów. Po tej jednej decyzji reszta była już tylko staranną arytmetyką.

Na olimpiadzie warto pamiętać o dwóch rzeczach. Po pierwsze: zanim zaczniesz liczyć, zapisz, co chcesz otrzymać — „ta liczba ma być rzeczywista", „te dwie odległości mają być równe". Rachunek bez celu jest najdłuższą drogą donikąd. Po drugie: sprawdzaj wynik na przypadku szczególnym (trójkąt równoboczny, prostokątny, równoramienny). Błąd znaku wychodzi wtedy od razu, a nie na ostatniej stronie.

Kącik nie będzie jednak wyłącznie geometryczny. W kolejnych odcinkach: nierówności i równania funkcyjne, kombinatoryka (zasada ekstremum, niezmienniki, zliczanie na dwa sposoby), teoria liczb (reszty kwadratowe, rzędy, równania diofantyczne) — a w geometrii współrzędne barycentryczne na poważnie i inwersja w liczbach zespolonych. Rozwiązania — zwłaszcza te „brzydkie, ale działające" — można zgłaszać przez stronę czasopisma.

Informacje wydawnicze

Tytuł: Asymptote
Numer: 05/2026
Typ publikacji: czasopismo internetowe (open access)
Częstotliwość: miesięcznik (wydania numerowane)
Miesiąc wydania: wrzesień 2026
Język: polski
Format: PDF (online)
ISSN: 3072-4929

Redakcja:
Redaktor naczelny: Ksawery Tomczak
Kontakt redakcyjny: `redakcja@asymptote.pl`

Wydawca:
Asymptote (projekt niezależny)
Strona internetowa: `https://asymptote.pl/`

Licencja:
Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY 4.0)

Polityka dostępu:
Open Access — wszystkie materiały dostępne bezpłatnie.

Opis:
Asymptote jest niezależnym czasopismem poświęconym matematyce, literaturze i ideom. Publikuje eseje, poezję matematyczną, prozę (fikcję literacką) oraz — od numeru 04/2026 — Kącik Olimpijczyka, traktując matematykę jako formę kultury i języka myślenia.

Oświadczenie redakcyjne:
Asymptote jest na ten moment małym projektem niezależnym.

Skład:
LaTeX (pdfLaTeX)

© 2026 Asymptote | ISSN 3072-4929