Asymptote
ISSN 3072-4929

Kategoria

ESEJ

Przekątna

O liście, której nie da się skończyć

Maria Świderska

Asymptote 05/2026 · wrzesień 2026
© 2026 Asymptote

Streszczenie. Esej opowiada o dowodzie przekątniowym Cantora z 1891 roku: żadna lista, choćby nieskończona, nie zawiera wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału od zera do jedynki. Autorka odtwarza rozumowanie krok po kroku, wyjaśnia, dlaczego w konstrukcji używa się wyłącznie cyfr pięć i sześć, i zestawia je z przeliczalnością liczb wymiernych oraz z miarą zero z poprzedniego eseju o „prawie wszędzie". Z matematyki przechodzi do pytania o to, co znaczy spisać wszystko — i dlaczego dowód, który niczego nie buduje, a tylko wskazuje lukę, bywa jednym z najmocniejszych.

Na trzecim roku, w sali bez okien, profesor od teorii mnogości poprosił nas o rzecz nietypową. Mieliśmy wyobrazić sobie listę. Nie krótką — nieskończoną, numerowaną: pierwsza liczba, druga liczba, trzecia, i tak dalej, bez końca. Na tej liście ma się znaleźć każda liczba rzeczywista z przedziału od zera do jedynki, zapisana w postaci rozwinięcia dziesiętnego. „Nie musicie jej kończyć — powiedział. — Wystarczy, że zgodzicie się, że da się ją ułożyć".

Nikt się nie sprzeciwił. Wydawało się to rozsądne. Liczb wymiernych jest nieskończenie wiele, a przecież dało się je ponumerować: jeden i pół, jedna trzecia, dwie trzecie, jedna czwarta, i tak dalej, porządnie, w kolejności rosnących mianowników. Dlaczego z rzeczywistymi miałoby być inaczej?

Wtedy profesor napisał na tablicy pierwszą liczbę z naszej listy, potem drugą, trzecią, aż do piątej, jedną pod drugą, w kolumnie. Zaczął podkreślać cyfry. Pierwszą cyfrę po przecinku w pierwszej liczbie. Drugą cyfrę w drugiej. Trzecią w trzeciej. Podkreślenia układały się w ukośną linię, w przekątną.

„Teraz — powiedział — zbudujemy nową liczbę. Pierwsza cyfra po przecinku będzie inna niż pierwsza cyfra pierwszej liczby. Druga cyfra — inna niż druga cyfra drugiej. Trzecia — inna niż trzecia cyfra trzeciej". Odwrócił się do nas. „Gdzie ona jest na naszej liście?".

Odpowiedź przychodziła powoli, jak światło, które dociera z daleka. Nigdzie. Nowa liczba różni się od pierwszej na pierwszym miejscu po przecinku, od drugiej na drugim, od setnej na setnym. Od każdej liczby z listy różni się co najmniej jedną cyfrą. A skoro każda liczba jest na liście, to tej nowej na liście nie ma. A przecież też jest liczbą z przedziału od zera do jedynki.

To jest cały dowód. Nie trzeba do niego niczego więcej: ani wzorów, ani granic, ani całek. Jest w nim tylko jedno pomysłowe posunięcie — zamiast szukać liczby, której na liście brakuje, wystarczy ją zbudować z samej listy, kawałek po kawałku, wbrew każdej pozycji z osobna.

Jest jedna pułapka i profesor, zanim ktoś ją wskazał, sam o niej wspomniał. Liczby dziesiętne bywają zapisywane na dwa sposoby: zero przecinek pięć to to samo co zero przecinek cztery dziewięć dziewięć dziewięć, bez końca. Gdyby nowa liczba zakończyła się nieskończonym ciągiem dziewiątek, mogłaby okazać się tą samą liczbą co któraś z listy, tylko zapisaną inaczej. Dlatego w konstrukcji używa się tylko cyfr pięć i sześć: jeżeli cyfra na przekątnej jest różna od pięć, zapisujemy pięć, a jeżeli równa pięć — zapisujemy sześć. Taka liczba nie ma dwóch zapisów, więc różnica na jednym miejscu rzeczywiście oznacza różnicę liczb.

Wyszłam z tych zajęć z dziwnym uczuciem, że ktoś mi coś zabrał i coś dał jednocześnie. Zabrał spokój, bo nieskończoność przestała być jedna. Zbiór liczb naturalnych jest nieskończony. Zbiór liczb wymiernych też. Ale liczb rzeczywistych jest, jak to się mówi, „więcej" — w ścisłym sensie, że nie da się ich ułożyć w ciąg. Dał natomiast wrażenie, że w matematyce istnieją dowody, które nie wyjaśniają, tylko wyznaczają granicę: tutaj kończą się listy.

Pisałam kiedyś o tym, że zbiór liczb wymiernych ma miarę zero. Z punktu widzenia długości jest pomijalny, a z punktu widzenia numerowania — idealny. Z liczbami rzeczywistymi jest odwrotnie: wypełniają prostą bez reszty, ale nie dają się ułożyć w żaden ciąg. Przeliczalność i miara to dwa różne sposoby pytania „ile", i matematyka nie obiecuje, że odpowiedzi się zgadzają.

Zostało jeszcze jedno pytanie, najbardziej niepokojące. Czy między liczbą elementów zbioru liczb naturalnych a liczbą elementów zbioru liczb rzeczywistych istnieje jeszcze coś pośredniego? Cantor sądził, że nie, i nie umiał tego udowodnić. Dopiero wiele lat później okazało się — dzięki pracom Gödla i Cohena — że przy zwykłych aksjomatach teorii mnogości nie da się tego ani udowodnić, ani obalić. Pytanie zostało więc, jak lista, której nie da się skończyć.

Do dziś lubię patrzeć na przekątną. Jest w niej coś z uczciwości: dowód nie twierdzi, że wie, jakiej liczby brakuje na liście. Twierdzi tylko, że jeśli ktoś pokaże mi listę, ja zawsze potrafię z niej zrobić liczbę, której na niej nie ma. Nie pokazuję palcem, gdzie jest luka. Pokazuję tylko, że luka jest wszędzie, gdzie ktoś uzna, że już wszystko spisał.