Asymptote

06 / 2026

czasopismo o matematyce, literaturze i ideach

Eseje

Zofia Wójcik
Jedna jaskółka wiosny nie czyni

Poezja matematyczna

Ksawery Tomczak
Dzień dobry, Eulerze

Marta Król
Łańcuch Markowa na niedzielę

Michał Panek
Ciąg, który nie wie, dokąd zmierza

Rafał Damianowski
Trzy wersy o stałych

Proza

Adam Krakowiak
Ławki

Ksawery Tomczak
Nocna zmiana w hotelu Hilberta

Kącik Olimpijczyka

Zofia Dębicka
Trzydzieści dowodów przez indukcję

ISSN 3072-4929

Redakcja: Ksawery Tomczak, Dorota Tomczak
Wydawca: Asymptote (projekt niezależny)
Kontakt: redakcja@asymptote.pl
https://asymptote.pl/

Licencja: Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY 4.0) · Open Access

© 2026 Asymptote

Spis treści

Manifest **ii**

Eseje **1**
Zofia Wójcik — Jedna jaskółka wiosny nie czyni 1

Poezja matematyczna **3**
Ksawery Tomczak — Dzień dobry, Eulerze 3
Marta Król — Łańcuch Markowa na niedzielę 4
Michał Panek — Ciąg, który nie wie, dokąd zmierza 6
Rafał Damianowski — Trzy wersy o stałych 8

Proza **9**
Adam Krakowiak — Ławki 9
Ksawery Tomczak — Nocna zmiana w hotelu Hilberta 11

Kącik Olimpijczyka **13**
Zofia Dębicka — Trzydzieści dowodów przez indukcję 13

Informacje wydawnicze **17**

Manifest

Matematyka zwykle przedstawiana jest jako coś domkniętego: zestaw reguł, wyników i procedur, które prowadzą od pytania do odpowiedzi. Ale to tylko jej powierzchnia. Pod spodem istnieje coś innego — sposób myślenia, język precyzji i nieprecyzji jednocześnie, przestrzeń, w której idee nabierają kształtu, zanim jeszcze staną się „wynikiem".

„Asymptote" powstaje z przekonania, że matematyka nie jest wyłącznie techniką rozwiązywania zadań, lecz formą kultury. Ma historię, estetykę, filozofię i własne napięcia. Bywa piękna nie dlatego, że prowadzi do użytecznych rezultatów, ale dlatego, że potrafi ujawniać struktury myślenia, których inaczej nie widać.

Interesuje nas matematyka, która wychodzi poza szkolną narrację. Matematyka jako doświadczenie intelektualne — czasem czyste i klarowne, czasem niepokojąco abstrakcyjne, a czasem zaskakująco bliskie literaturze, sztuce czy filozofii.

Nie szukamy wyłącznie ścisłości, jeśli miałaby ona tłumić myślenie. Szukamy raczej precyzji, która otwiera przestrzeń, zamiast ją zamykać.

„Asymptote" nie jest podręcznikiem, kursem ani zbiorem zadań. Jest przestrzenią dla tekstów, które traktują matematykę poważnie, ale nie redukują jej do narzędzia.

Matematyka nie kończy się tam, gdzie kończą się obliczenia.

Eseje

Esej

Jedna jaskółka wiosny nie czyni

O przykładach, które udają dowody

Zofia Wójcik

Streszczenie. Esej przygląda się polskiemu przysłowiu o jaskółce jako zasadzie metodologicznej: żadna liczba przykładów nie jest dowodem. Punktem wyjścia jest trójmian Eulera, który daje liczby pierwsze dla czterdziestu kolejnych argumentów i zawodzi przy czterdziestym pierwszym, oraz klasyczny „dowód", że wszystkie konie mają tę samą maść. Autorka pokazuje, na czym polega indukcja, dlaczego jej krok musi działać dla każdego numeru, i co z tego wynika dla myślenia poza matematyką: o tym, ile potwierdzeń potrzeba, by uwierzyć, i ile wystarczy, by zwątpić.

W moim rodzinnym domu przysłowia nie były ozdobą rozmowy. Były argumentami. Kiedy mój brat oświadczył, że skoro przez trzy tygodnie nie padało, to już nie będzie padać, matka odpowiedziała: „Jedna jaskółka wiosny nie czyni", i na tym dyskusja się skończyła. Dopiero na studiach zrozumiałam, że to zdanie nie dotyczy ani pogody, ani ptaków. Dotyczy tego, czym jest dowód.

Najlepszy przykład, jaki znam, podał Euler. Weźmy wyrażenie $n^2 + n + 41$ i podstawiajmy kolejno $n = 0, 1, 2, \ldots$ Dla zera dostajemy 41, dla jedynki 43, dla dwójki 47, dla trójki 53. Wszystko to są liczby pierwsze. Ciągniemy dalej: 61, 71, 83, 97 — pierwsze, pierwsze, pierwsze. Można przepisać cały rachunek do czterdziestego kroku i za każdym razem trafi się liczba pierwsza. Czterdzieści zgodnych przykładów. Kto by się upierał, że wzór nie działa zawsze?

Dla $n = 40$ mamy $40^2 + 40 + 41 = 1681$. A $1681 = 41^2$. Jaskółka nie przyleciała.

Nie trzeba było długo szukać; wystarczyło zauważyć, że dla $n = 41$ wszystkie trzy składniki dzielą się przez 41. Wzór nie był przypadkiem, tylko pułapką, w której przykłady ustawiają się w schludny szereg tylko dlatego, że pierwszy błąd leży za horyzontem naszej cierpliwości. Gdyby ktoś sprawdził trzydzieści dziewięć wartości, miałby dokładnie tyle samo „dowodu" co ktoś, kto sprawdził czterdzieści.

Matematyka ma jednak narzędzie, które pozwala powiedzieć coś o wszystkich liczbach naturalnych naraz i nie jest przy tym sztuczką: indukcję. Jej schemat zna każdy, kto widział domino. Pokazujemy, że przewróci się pierwszy kamień. Pokazujemy, że jeśli przewróci się kamień o numerze n, to przewróci się także kamień o numerze $n + 1$. I to wszystko; przewrócą się wszystkie. Nie sprawdzamy ich po kolei. Sprawdzamy mechanizm.

Wartość tego schematu polega na tym, że krok musi być udowodniony *dla każdego* n, a nie dla kilku wybranych. I tutaj zaczynają się historie, które lubię najbardziej, bo bywają to historie o błędach popełnianych bardzo starannie.

Znany jest „dowód", że wszystkie konie mają tę samą maść. Twierdzenie brzmi: w każdej grupie n koni wszystkie konie są tej samej maści. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Załóżmy, że działa dla grup n-elementarnych, i weźmy $n + 1$ koni. Usuńmy jednego: pozostałe n ma tę samą maść. Usuńmy innego: znów n koni o tej samej maści. Ale te dwie grupy mają wspólnych koni, więc maść jest ta sama w całej grupie. Koniec, indukcja zakończona, a rzeczywistość się kłóci.

Błąd tkwi w jednym miejscu, i szukanie go to doskonałe ćwiczenie: krok indukcyjny zakłada, że obie grupy mają wspólnego konia. To prawda dla $n \geq 2$. Ale przejście od jednego konia do dwóch — z $n = 1$ do $n = 2$ — nie ma wspólnego elementu, bo grupy są jednoelementowe i rozłączne. Domino numer jeden nie przewraca domina numer dwa. Cały łańcuch rozpada się w pierwszym ogniwie, choć wszystkie kolejne ogniwa są poprawne.

Lubię ten przykład dlatego, że pokazuje coś, czego nie pokazuje trójmian Eulera. Euler zawodził dopiero po czterdziestu krokach; konie zawodzą natychmiast, tylko trzeba wiedzieć, gdzie patrzeć. W obu przypadkach błąd jest taki sam: ktoś uznał, że sprawdził mechanizm, a sprawdził tylko jego wygląd.

Przysłowie o jaskółce ma jednak drugą stronę, o której mówi się rzadziej. Jeśli jedna jaskółka niczego nie dowodzi, to jedna zima, która nie przyszła, też nie dowodzi niczego. Ale jeden kontrprzykład obala twierdzenie raz na zawsze. Trójmian Eulera jest martwy od chwili, gdy ktoś podstawił czterdziestkę. Nikt nie musi czekać na drugą próbę. Asymetria między potwierdzeniem a obaleniem jest największą cechą tej dyscypliny: tysiąc przykładów nie dowodzi, jeden zaprzecza.

Wolałabym, żeby nauczono mnie tego wcześniej, nie na wykładzie z logiki, ale przy kuchennym stole. Tam, gdzie wnioski wyciąga się z trzech tygodni suszy, z jednego spotkania, z dwóch przyjaciół, którzy się nie odezwali. Może wtedy zamiast pytać „ile razy to się sprawdziło?", częściej pytałabym o to, czego rzeczywiście dowiedli. Czy znam mechanizm, czy tylko widziałam kilka jaskółek.

Mój brat, nawiasem mówiąc, nie przestał twierdzić, że już nie będzie padać. Tydzień później zmókł do suchej nitki. Przyszedł do domu, usiadł przy stole i powiedział: „Trzy tygodnie to jednak za mało". Matka postawiła przed nim herbatę. Nie powiedziała ani słowa. Nie musiała. Dowód został przeprowadzony.

Poezja matematyczna

Wiersz

Dzień dobry, Eulerze

Ksawery Tomczak

Streszczenie. Poranek jednego człowieka widziany przez tożsamość Eulera, która w jednym równaniu spotyka pięć najważniejszych stałych matematyki. Zero, jedynka, liczba e, pi i jednostka urojona siedzą przy kuchennym stole jak rodzina, która nie ma ze sobą nic wspólnego, a jednak się domyka. Wiersz jest o tym, że sens bywa kwestią obrotu o pół okręgu.

Wstaję o siódmej, jak liczba pierwsza —
niepodzielnie i bez powodu.
Na stole czajnik, chleb i równanie
z wczoraj, którego nie zmył nikt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Pięć rzeczy, które nie znają się z widzenia,
a jedzą przy jednym stole.
Jedynka siedzi prosto, jak pierwsza z klasy.
Zero patrzy w okno — jemu wszystko jedno.
π dolewa sobie herbaty bez końca
i opowiada o kołach, których nie umie zamknąć.
e rośnie po cichu, procent po procencie,
nikt nie wie, kiedy ją zaprosił.
A i — i przyszło bez zaproszenia,
bo kwadrat jego wynosi minus jeden,
i tylko ono potrafi obrócić ten dzień
o pół okręgu.

Euler patrzył na to rano, przy śniadaniu,
i nie zawołał żadnego z nich po imieniu.
Powiedział tylko: wystarczy
pójść pod kątem prostym do siebie,
dwa razy,
i wrócić do tego samego stołu,
tylko po drugiej stronie zera.

Więc wychodzę z domu. Skręcam raz,
potem drugi, nie licząc kroków.
Idę prosto, a robię zwrot.
Dzień dobry — mówię do ludzi na przystanku.
Odpowiadają: dzień dobry,
nie wiedząc, że to tożsamość,
że wystarczy dodać jedynkę
do tego, co zrobiło się samo,
żeby wyszło
zero.

Wiersz

Łańcuch Markowa na niedzielę

Marta Król

Streszczenie. Wiersz opisuje życie jednej osoby jako łańcuch Markowa o dwóch stanach, dom i praca, z prawdopodobieństwami przejścia, które pamiętają tylko to, gdzie człowiek jest teraz. Obliczony rozkład stacjonarny — cztery siódme życia w domu i trzy siódme w pracy — okazuje się zdaniem na temat niedziel. Wiersz zadaje pytanie o to, czy życie pozbawione pamięci jest wolnością, czy tylko macierzą.

Mam dwa stany, jak każdy:
dom i *praca*.
Nie pamiętam, skąd przyszłam —
łańcuch Markowa uważa to za zaletę.
Liczy się tylko to,
gdzie jestem teraz,
a jutro wylosuje się samo.

Z domu zostaję w domu z szansą siedem dziesiątych,
trzy dziesiąte idzie w kierunku pracy,
jak praca w kierunku domu
z szansą czterech dziesiątych,
a sześć dziesiątych zostaje na miejscu,
przy biurku, z zimną herbatą.

Zapisałam to w macierzy:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix},$$

każdy wiersz sumuje się do jedynki,
bo człowiek musi gdzieś być —
nawet w rachunku prawdopodobieństwa
nie wolno zniknąć.

Pytałam: ile ze mnie zostanie w domu,
jeśli to potrwa wiele lat?
Odpowiedź nazywa się rozkładem stacjonarnym:
taki wektor, który po przejściu
przez całe moje życie
zostaje sobą.
Rozwiązałam układ, nie patrząc w okno:

$$\pi_D \cdot 0{,}3 = \pi_P \cdot 0{,}4, \quad \pi_D + \pi_P = 1.$$

Wyszło: cztery siódme w domu,
trzy siódme w pracy.

Cztery siódme — to jest niedziela,
policzona ułamkiem.
Nie wiem, czy jest to dużo.
Siódemka rozkłada tydzień na części,
a ja stoję w każdej z nich jednocześnie,

nie wiedząc, która jest która.

Najdziwniejsze jest to, że łańcuch nie pamięta,
a mimo to wszystko zbiega:
niezależnie od tego, w którym stanie zaczęłam,
po wielu krokach
będę w domu z prawdopodobieństwem cztery siódme.
Przeszłość nie ma tu nic do powiedzenia.
To albo największa wolność,
albo tylko macierz,
która wie, że ma rację.

Wiersz

Ciąg, który nie wie, dokąd zmierza

Michał Panek

Streszczenie. Poemat o ciągu, którego wyrazy na przemian wynoszą jeden i minus jeden, a który — w przeciwieństwie do ciągów dobrze wychowanych — nie ma granicy. Rozbieżność zostaje potraktowana jako stan duszy: ciąg wraca, ale nigdy nie zostaje; zbliża się, ale nie do niczego. Na marginesie pojawiają się podciągi, które mają granice (jedynkę i minus jedynkę), co daje nadzieję, że z nieokreśloności da się wyodrębnić przynajmniej dwie decyzje.

Są ciągi, które wiedzą, dokąd idą:
wyraz po wyrazie, malutkim krokiem,
zbliżają się do swojej granicy
jak pociąg do stacji, na której nikt nie czeka.
O nich się mówi: zbieżne, wychowane,
dla każdego epsilona znajdą miejsce w kolejce.

A ja jestem inny. Wyrazy mnie
są jeden, minus jeden, znów jeden,
i tak bez końca, co drugi krok
po przeciwnej stronie własnego cienia.
Nigdy nie ucieknę w nieskończoność,
nigdy się nie zbliżę do niczego.
Jestem rozbieżny w sposób najbardziej uprzejmy:
cały czas w tym samym miejscu,
tylko co drugi raz po złej stronie zera.

Matematycy patrzą na mnie z politowaniem.
Mówią: nie ma granicy.
To znaczy: wybierz sobie liczbę,
a ja wskażę ci wyraz,
który z nią nie wytrzyma ani kroku.
Powiedz, że zmierzam do jedynki —
a minus jeden spojrzy ci w oczy.
Powiedz, że zero, ten spokojny środek —
a ja ani razu tam nie byłem.

Ale słuchaj, jest coś, co mi zostało.
Gdy wybiorę tylko wyrazy parzyste,
dostaję samą jedynkę: stałą, spokojną,
granicę o oczach pozbawionych wątpliwości.
Gdy wybiorę nieparzyste —
cały czas minus jeden,
tak cicho, że prawie można w to uwierzyć.
Dwa podciągi, dwie prawdy,
a żaden z nich nie jest mną.

Więc nie pytaj, dokąd zmierzam.
Zmierzam tam i z powrotem.

Nie dlatego, że nie umiem się zdecydować,
tylko dlatego, że decyzji jest dokładnie dwie,
i obie mi się należą.
Jeśli kiedyś ktoś zapyta o mnie w dowodzie,
napiszcie: rozbieżny.
I dodajcie w nawiasie,
drobnym drukiem,
że wiedział, kim jest.

Wiersz

Trzy wersy o stałych

Rafał Damianowski

Streszczenie. Cykl pięciu krótkich trójwierszy o stałych matematycznych: pi, e, złotym podziale, jednostce urojonej i zerze. Każdy trójwiersz próbuje zmieścić w trzech linijkach jedną cechę bohatera. Forma jest minimalistyczna, bo stałe są stałe.

i. Pi

Obwód do średnicy.
Po przecinku cyfry bez końca,
żadna nie wie, że jest następna.

ii. e

Procent na procent, po cichu.
Dziel rok na coraz drobniejsze kawałki —
rośnie do pewnej granicy: do mnie.

iii. Złoty podział

Dłuższy do krótszego
jak całość do dłuższego —
tyle, a już jest ładnie.

iv. i

Nikt mnie nie widział na prostej,
ale kwadrat mój wynosi minus jeden,
więc chyba jednak jestem.

v. Zero

Z niczego powstało
i z jedynki zrobiło dziesiątkę —
nic bywa bardzo pracowite.

Proza

Opowiadanie

Ławki

Adam Krakowiak

Streszczenie. Dalszy ciąg historii wiejskiego nauczyciela i szkolnego Koła. We wrześniu połączone klasy czwarta i piąta zasiadają w jednej sali, a narrator musi rozsadzić dwadzieścioro dzieci w dziesięciu ławkach. Okazuje się, że takich rozsadzeń jest ponad sześćset pięćdziesiąt milionów — i że żadne z nich nie jest tym właściwym. Opowiadanie jest o tym, że liczba możliwości nie zwalnia z wyboru, a jedna ławka potrafi zmienić układ całej sali.

Pierwszego września zadzwonił dzwonek i do sali weszło dwadzieścioro dzieci. Czwarta i piąta klasa, razem, w jednym pomieszczeniu, które było projektowane dla piętnaściorga. Ławek jest dziesięć, dwuosobowych, przykręcone do podłogi w trzech rzędach. Przykręcone mocno, bo w osiemdziesiątym szóstym ktoś uznał, że to dobry pomysł.

Stałem przy tablicy z listą w ręku i wiedziałem, że czeka mnie zadanie, którego żaden podręcznik nie rozwiązuje. Trzeba było posadzić dwadzieścioro dzieci po dwoje.

Oczywiście próbowałem policzyć. Taki mam nawyk. Pierwsze dziecko może usiąść z dowolnym z dziewiętnaściorga pozostałych. Z tych, które zostały, pierwsze może usiąść z jednym z siedemnaściorga. I tak dalej, aż zostanie para. Dziewiętnaście razy siedemnaście razy piętnaście i tak dalej, do jedynki. Wyszło mi sześćset pięćdziesiąt cztery miliony siedemset dwadzieścia dziewięć tysięcy siedemdziesiąt pięć.

Tyle jest sposobów, żeby w jednej sali, w dziesięciu ławkach, rozsadzić dwadzieścioro dzieci po dwoje. Nie licząc tego, w którym rzędzie kto siedzi. Gdybym zmieniał układ co dzień, nie wyczerpałbym możliwości przez kilkaset tysięcy lat. Zapisałem tę liczbę w zeszycie, w którym zapisuję rzeczy, których nie umiem jeszcze zrozumieć. Pod spodem napisałem: ale ja muszę wybrać jeden.

Zrobiłem to, co robi każdy nauczyciel, gdy nie wie, co zrobić. Powiedziałem: siadajcie, jak chcecie.

Sala wydała z siebie dźwięk, który znam: hałas ludzi, którzy robią szybki rachunek, kto z kim chce i kto z kim nie może. Bliźniaki Nowakowie usiadły razem, bez dyskusji, jak od zawsze. Natalka, która w zeszłym roku siedziała sama w kącie, została w kącie. Kuba zajął miejsce w drugim rzędzie i, o dziwo, zostawił obok siebie wolne krzesło. Wiktoria przeszła przez całą salę z plecakiem w jednej ręce i, jak mi się wydawało, z jakimś postanowieniem w drugiej.

Po dwóch minutach okazało się, że dziewiętnaścioro dzieci siedzi, a jedno stoi. Był to chłopiec z czwartej klasy, którego imienia jeszcze nie znałem, i który trzymał plecak oburącz, jak ktoś, kto nie wie, czy wolno mu go postawić.

Policzyłem jeszcze raz. Dziesięć ławek, dwadzieścia krzeseł, dwadzieścioro dzieci — a jedno stoi. Więc jedno krzesło było wolne i wiedziałem już które: to obok Kuby. Rachunek nigdy nie zawodzi. Zawodzą ludzie, którzy zostawiają obok siebie puste miejsce, bo jeszcze nie wiedzą, że ktoś jest po drugiej stronie.

„Chcesz usiąść obok Kuby?" — zapytałem chłopca, wskazując wolne krzesło. Chłopiec spojrzał na Kubę, Kuba na chłopca. Kuba przesunął plecak. Tyle. Nikt nic nie powiedział.

Teraz dwadzieścioro dzieci siedziało po dwoje, a ja stałem przy tablicy. Dwadzieścioro dzieci, dziesięć ławek, żadnego krzesła wolnego i żadnego nadmiarowego. Jedno z tych sześciuset pięćdziesięciu czterech milionów rozsadzeń, wybrane nie przeze mnie, ale i nie bez mojego udziału. Wyszło dobrze. Nie dlatego, że było właściwe. Dlatego, że było czyjeś.

Wieczorem na Kole, które w tym roku zbiera się w sali czwartej klasy, bo tylko tam mieszczą się wszyscy chętni, Wiktoria zapytała, czy to, jak usiadły, było przypadkiem. Odpowiedziałem, że z matematycznego punktu widzenia każde rozsadzenie jest przypadkiem, bo jest jednym z wielu możliwych. „A z niematematycznego?" — zapytała. Nie odpowiedziałem od razu. Napisałem na tablicy liczbę sześćset pięćdziesiąt cztery miliony siedemset dwadzieścia dziewięć tysięcy siedemdziesiąt pięć i podkreśliłem ją dwa razy.

„Z niematematycznego — powiedziałem — wybór jest wtedy, kiedy ktoś przesunie plecak".

Opowiadanie

Nocna zmiana w hotelu Hilberta

Ksawery Tomczak

Streszczenie. Narratorem jest nocny recepcjonista hotelu, w którym jest nieskończenie wiele pokoi i w którym każdy pokój jest zajęty. Kiedy do drzwi dochodzi kolejny gość, a potem autokar nieskończenie wielu gości, a potem nieskończenie wiele autokarów, recepcjonista za każdym razem znajduje miejsce, przesuwając wszystkich. Opowiadanie jest o tym, że w świecie bez końca każdy może zostać przyjęty, ale cena za to jest płacona przez tych, którzy już mieszkają: muszą się wyprowadzać, zanim zdążą się rozpakować.

Hotel nie ma końca, więc nie ma też recepcji w zwykłym sensie. Ja siedzę przy biurku, które stoi przy wejściu, i mam ten przywilej, że z mojego miejsca widać pokój numer jeden. Nie widać pokoju numer dwa, trzy ani miliona. Widać tylko jedynkę, bo korytarz biegnie w głąb i znika, jak każdy korytarz, na którym nie ma końca.

Wszystkie pokoje są zajęte. Nie mam na to żadnego papierowego dowodu. Wiem to stąd, że nigdy nie zdarzyło się, żebym powiedział „nie ma miejsc". Ale też nigdy nie powiedziałem „jest wolny". Wiem, że pokój numer n jest zajęty, bo wiem, kto w nim mieszka. W jedynce pan Stanisław. W dwójce sąsiadka, której imienia nie pamiętam. W trójce dwóch braci, którzy zawsze się kłócą, ale tylko o pogodę.

Nocą przychodzi nowy gość. Dzwoni, jak dzwonią wszyscy: dwa razy, nieśmiało. Ma walizkę, kapelusz i mina człowieka, który nie wierzy, że mu się uda.

„Mam wolny pokój?" — pyta.

„Wszystkie są zajęte" — mówię. — „Ale to niczego nie zmienia".

Biorę telefon i dzwonię do każdego pokoju, jednego po drugim, i o każdym mówię to samo: proszę przenieść się o jeden pokój dalej. Pan Stanisław do dwójki. Sąsiadka do trójki. Bracia do czwórki. Pokój numer n do pokoju numer $n+1$. Nikt się nie sprzeciwia. Telefonuję do wszystkich naraz, bo nie mam wyjścia, i wszyscy w tej samej chwili biorą walizki i przechodzą dalej. Wolny zostaje pokój numer jeden.

Gość wchodzi. Postawił walizkę. Rozgląda się i mówi: „Przecież mówiliście, że nie ma miejsc".

„Nie było" — odpowiadam. — „Teraz jest".

Nad ranem przyjeżdża autokar. Nieskończenie wiele pasażerów, każdy z biletem opatrzonym numerem: pierwszy, drugi, trzeci, i tak dalej. Kierowca wchodzi pierwszy, zdejmuje czapkę i mówi: „Przepraszam, że tak późno". Podnoszę słuchawkę.

Tym razem zasada jest inna. Pokój numer n przenosi się do pokoju numer $2n$. Pan Stanisław z jedynki do dwójki. Sąsiadka z dwójki do czwórki. Bracia z trójki do szóstki. Wszyscy dotychczasowi goście lądują w pokojach parzystych. A wszystkie pokoje nieparzyste — jeden, trzy, pięć, siedem — zostają wolne. Nieskończenie wiele. Dla pasażera o numerze k wystarczy pokój numer $2k-1$.

Pasażerowie wchodzą długim rzędem, aż zniknie ostatni, którego nie ma.

Jest jednak coś, czego uczy ta praca i czego nie ma w żadnym podręczniku. Za każdym razem, gdy przyjmuję nowego gościa, ktoś musi się przeprowadzić. Pan Stanisław przez lata wędrował od jedynki, do dwójki, do czwórki, do ósemki, do szesnastki. Nigdy nie zdążył się rozpakować. Kiedy pytam go, czy mu to przeszkadza, odpowiada: „Skoro wszyscy się mieszczą, to chyba nie mam prawa się skarżyć". I po chwili dodaje: „Choć szkoda, że z każdym razem mieszkam dalej od drzwi".

W nocy, kiedy hotel milknie i słychać tylko własny oddech, czasem myślę o tym, że hojność, która nie kosztuje niczego, nie jest hojnością. A tutaj kosztuje wszystkich po trochu, z pozoru za darmo. Nikt nie traci miejsca. Wszyscy tracą bliskość pierwszego pokoju.

Był taki dzień, kiedy przyjechało nieskończenie wiele autokarów, w każdym nieskończenie wielu pasażerów. Wtedy zrobiłem się naprawdę zmęczony. Zrobiłem to samo, co zawsze: podniosłem słuchawkę. Pan Stanisław z jedynki do dwójki. Sąsiadka z dwójki do czwórki. Bracia z trójki do ósemki — tym razem pokój numer n przenosił się do pokoju numer 2^n. Pasażerom z kolejnych autokarów przydzielałem pokoje według dziwnego klucza, w którym każdy autokar dostawał własną liczbę pierwszą i zajmował jej kolejne potęgi. Nikt nie dostał dwóch pokojów. Nikt nie został na ulicy.

Rano, kiedy już było po wszystkim, ktoś zapytał mnie, czy nie jest to zadanie nie do wykonania. „Wykonuję je co noc — odpowiedziałem — i nigdy nie okazało się niewykonalne". „Nie boi się pan, że kiedyś zabraknie miejsc?" — „Nie" — powiedziałem. — „Boję się tylko, że ktoś kiedyś zapyta, czy wszyscy lubią się przenosić".

Wciąż nie wiem, jak na to odpowiedzieć. Dlatego siedzę przy biurku i patrzę na pokój numer jeden. Przez uchylone drzwi widać, jak pan Stanisław znów pakuje swoją jedyną walizkę. Pewnie ktoś przyjechał.

Kącik Olimpijczyka

Kącik Olimpijczyka

Trzydzieści dowodów przez indukcję

Zasada indukcji matematycznej w działaniu

Zofia Dębicka

Streszczenie. Odcinek Kącika Olimpijczyka poświęcony jednemu narzędziu: zasadzie indukcji matematycznej. Trzydzieści krótkich, kompletnych dowodów przez indukcję — od sum i nierówności, przez podzielność, ciąg Fibonacciego i kombinatorykę geometryczną, po indukcję zupełną, rekurencje i klasyczne zadanie o wyrażeniu x plus jeden przez x. Każdy dowód ma tę samą budowę: baza, założenie, krok. Różni je to, co w kroku trzeba zauważyć.

Zasada

Niech $T(n)$ będzie zdaniem o liczbie naturalnej n. Jeśli $T(n_0)$ jest prawdziwe (*baza*) i dla każdego $n \geq n_0$ z prawdziwości $T(n)$ (*założenie indukcyjne*) wynika prawdziwość $T(n+1)$ (*krok*), to $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geq n_0$. W wersji zupełnej w kroku wolno korzystać z $T(k)$ dla wszystkich $n_0 \leq k \leq n$. Poniżej trzydzieści dowodów; w każdym znaczek „baza” oznacza sprawdzenie najmniejszego n, a „krok” przejście od n do $n+1$.

Sumy i iloczyny

Zadanie 1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Dowód. Baza: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$. Krok: $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. ∎

Zadanie 2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Dowód. Baza: $1 = 1^2$. Krok: $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$. ∎

Zadanie 3. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Dowód. Baza: $1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$. Krok: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. ∎

Zadanie 4. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Dowód. Baza: $1 = 1^2$. Krok: $\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2\,(n^2+4n+4)}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$. ∎

Zadanie 5. Dla $q \neq 1$: $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ $(n \geq 0)$.

Dowód. Baza: $1 = \frac{q-1}{q-1}$. Krok: $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$. ∎

Zadanie 6. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Dowód. Baza: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Krok: $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$. ∎

Zadanie 7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Dowód. Baza: $2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$. Krok: $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$. ■

Zadanie 8. Dla $n \geq 2$: $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$.

Dowód. Baza: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Krok: $\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. ■

Nierówności

Zadanie 9. Dla $n \geq 1$: $2^n > n$.

Dowód. Baza: $2 > 1$. Krok: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n \geq n + 1$. ■

Zadanie 10. Dla $n \geq 1$: $n! \geq 2^{n-1}$.

Dowód. Baza: $1 \geq 1$. Krok: $(n+1)! = (n+1)\, n! \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, bo $n + 1 \geq 2$. ■

Zadanie 11 (nierówność Bernoulliego)**.** Dla $x \geq -1$ i $n \geq 1$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Dowód. Baza: równość. Krok: ponieważ $1 + x \geq 0$, mnożymy założenie przez $1 + x$: $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$. ■

Zadanie 12. Dla $n \geq 5$: $n^2 < 2^n$.

Dowód. Baza: $25 < 32$. Krok: dla $n \geq 3$ mamy $2n + 1 < n^2$, więc $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2n^2 < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. ■

Zadanie 13. $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.

Dowód. Baza: $1 \leq 1$. Krok: wystarczy $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, a to jest równoważne $n \leq n + 1$. ■

Zadanie 14. $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$.

Dowód. Baza: $1 > 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}83$. Krok: wystarczy $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$, tj. $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > 2\sqrt{n+1}$, co jest prawdą. ■

Zadanie 15. Ciąg $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ spełnia $a_n < 2$ dla każdego n.

Dowód. Baza: $\sqrt{2} < 2$. Krok: z $a_n < 2$ mamy $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4} = 2$. ■

Podzielność

Zadanie 16. $6 \mid 7^n - 1$.

Dowód. Baza: $7 - 1 = 6$. Krok: $7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6$. ■

Zadanie 17. $3 \mid n^3 + 2n$.

Dowód. Baza: $1 + 2 = 3$. Krok: $(n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$. ■

Zadanie 18. $7 \mid 11^n - 4^n$.

Dowód. Baza: $11 - 4 = 7$. Krok: $11^{n+1} - 4^{n+1} = 11\left(11^n - 4^n\right) + 7 \cdot 4^n$. ■

Zadanie 19. Każdą kwotę całkowitą $n \geq 8$ złotych można zapłacić monetami o nominałach 3 i 5 złotych.

Dowód. Indukcja zupełna. Bazy: $8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3 + 3$, $10 = 5 + 5$. Krok: dla $n \geq 11$ kwota $n - 3 \geq 8$ jest płatna z założenia; dokładamy monetę trzyzłotową. ■

Zadanie 20. Każda liczba naturalna $n \geq 2$ ma dzielnik pierwszy.

Dowód. Indukcja zupełna. Jeśli n jest pierwsza, jest własnym dzielnikiem pierwszym. Inaczej $n = ab$ z $1 < a < n$; z założenia a ma dzielnik pierwszy, który dzieli także n. ■

Ciąg Fibonacciego

Niech $F_1 = F_2 = 1$ i $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Zadanie 21. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Dowód. Baza: $1 = F_3 - 1 = 2 - 1$. Krok: $F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$. ■

Zadanie 22. $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Dowód. Baza: $1 = 1 \cdot 1$. Krok: $F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2}$. ■

Kombinatoryka i geometria

Zadanie 23. Zbiór n-elementowy ma 2^n podzbiorów.

Dowód. Baza: zbiór pusty ma jeden podzbiór, $2^0 = 1$. Krok: w zbiorze $(n+1)$-elementowym wyróżnijmy element a. Podzbiorów bez a jest 2^n (z założenia), a podzbiorów z a jest tyle samo, bo odpowiadają im wzajemnie jednoznacznie podzbiory bez a po dołożeniu a. Razem $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. ■

Zadanie 24. Wypukły n-kąt ($n \geq 3$) ma $\dfrac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.

Dowód. Baza: trójkąt nie ma przekątnych. Krok: z wypukłego $(n+1)$-kąta $V_1 \ldots V_{n+1}$ usuńmy wierzchołek V_{n+1}. Przekątnych n-kąta $V_1 \ldots V_n$ jest $\frac{n(n-3)}{2}$. Dochodzą: bok V_nV_1, który staje się przekątną, oraz $n-2$ przekątne wychodzące z V_{n+1} (do wszystkich wierzchołków z wyjątkiem V_n, V_1 i jego samego). Razem $\frac{n(n-3)}{2} + (n-2) + 1 = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$. ■

Zadanie 25. Suma kątów wewnętrznych wypukłego n-kąta ($n \geq 3$) wynosi $(n-2) \cdot 180°$.

Dowód. Baza: trójkąt, $180°$. Krok: przekątna V_nV_1 odcina od wypukłego $(n+1)$-kąta trójkąt $V_nV_{n+1}V_1$ i n-kąt $V_1 \ldots V_n$. Kąty obu części sumują się do kątów $(n+1)$-kąta, zatem suma wynosi $(n-2) \cdot 180° + 180° = (n-1) \cdot 180°$. ■

Zadanie 26. n prostych na płaszczyźnie, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie, dzieli płaszczyznę na $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ obszarów.

Dowód. Baza: $n = 0$ daje jeden obszar. Krok: $(n+1)$-sza prosta przecina n poprzednich w n różnych punktach, które dzielą ją na $n+1$ odcinków (łącznie z promieniami). Każdy z nich dzieli jeden dotychczasowy obszar na dwa, więc przybywa $n+1$ obszarów: $\frac{n^2+n+2}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$. ■

Zadanie 27 (wieże Hanoi)**.** n krążków można przenieść z jednego pręta na inny w $2^n - 1$ ruchach, zgodnie z regułami (jeden krążek na ruch, większy nigdy na mniejszym).

Dowód. Baza: jeden krążek, jeden ruch. Krok: n górnych krążków przenosimy na pręt pomocniczy ($2^n - 1$ ruchów), największy na pręt docelowy (1 ruch), potem n krążków z pomocniczego na największy ($2^n - 1$ ruchów). Razem $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$. ■

Analiza i liczby zespolone

Zadanie 28. $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ dla $n \geq 1$.

Dowód. Baza: $(x)' = 1$. Krok: z reguły Leibniza $(x \cdot x^n)' = x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n$. ■

Zadanie 29 (wzór de Moivre'a)**.** $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ dla $n \geq 1$.

Dowód. Baza: oczywista. Krok: $(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta) + i(\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta) = \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta$. ■

Zadanie olimpijskie

Zadanie 30. Niezerowa liczba rzeczywista x spełnia $x + \dfrac{1}{x} = m$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 0$ liczba $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ jest całkowita.

Dowód. Niech $s_n = x^n + x^{-n}$. Mamy $s_0 = 2$ i $s_1 = m$, obie całkowite. Dla $n \geq 1$

$$s_1 s_n = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) = s_{n+1} + s_{n-1},$$

czyli $s_{n+1} = m\,s_n - s_{n-1}$. Indukcja zupełna z dwiema bazami: jeśli s_{n-1} i s_n są całkowite, to $s_{n+1} = ms_n - s_{n-1}$ też jest całkowite. Stąd $s_n \in \mathbb{Z}$ dla każdego $n \geq 0$. ■

Zamiast zakończenia

Ten ostatni dowód pokazuje, po co indukcji dwie bazy: krok odwołuje się do dwóch poprzedników, więc jedna baza nie uruchomiłaby mechanizmu. W każdym z trzydziestu przykładów pytanie jest to samo: co z n można przenieść na $n+1$? Gdy znamy odpowiedź, reszta jest rachunkiem. Własne dowody przez indukcję, szczególnie te z nietypowym krokiem, można zgłaszać przez stronę czasopisma.

Informacje wydawnicze

Tytuł: Asymptote
Numer: 06/2026
Typ publikacji: czasopismo internetowe (open access)
Częstotliwość: miesięcznik (wydania numerowane)
Miesiąc wydania: październik 2026
Język: polski
Format: PDF (online)
ISSN: 3072-4929

Redakcja:
Redaktor naczelny: Ksawery Tomczak
Kontakt redakcyjny: `redakcja@asymptote.pl`

Wydawca:
Asymptote (projekt niezależny)
Strona internetowa: `https://asymptote.pl/`

Licencja:
Creative Commons Attribution 4.0 (CC BY 4.0)

Polityka dostępu:
Open Access — wszystkie materiały dostępne bezpłatnie.

Opis:
Asymptote jest niezależnym czasopismem poświęconym matematyce, literaturze i ideom. Publikuje eseje, poezję matematyczną, prozę (fikcję literacką) oraz — od numeru 04/2026 — Kącik Olimpijczyka, traktując matematykę jako formę kultury i języka myślenia.

Oświadczenie redakcyjne:
Asymptote jest na ten moment małym projektem niezależnym.

Skład:
LaTeX (pdfLaTeX)

© 2026 Asymptote | ISSN 3072-4929