Asymptote
ISSN 3072-4929

Kategoria

ESEJ

Jedna jaskółka wiosny nie czyni

O przykładach, które udają dowody

Zofia Wójcik

Asymptote 06/2026 · październik 2026
© 2026 Asymptote

Streszczenie. Esej przygląda się polskiemu przysłowiu o jaskółce jako zasadzie metodologicznej: żadna liczba przykładów nie jest dowodem. Punktem wyjścia jest trójmian Eulera, który daje liczby pierwsze dla czterdziestu kolejnych argumentów i zawodzi przy czterdziestym pierwszym, oraz klasyczny „dowód", że wszystkie konie mają tę samą maść. Autorka pokazuje, na czym polega indukcja, dlaczego jej krok musi działać dla każdego numeru, i co z tego wynika dla myślenia poza matematyką: o tym, ile potwierdzeń potrzeba, by uwierzyć, i ile wystarczy, by zwątpić.

W moim rodzinnym domu przysłowia nie były ozdobą rozmowy. Były argumentami. Kiedy mój brat oświadczył, że skoro przez trzy tygodnie nie padało, to już nie będzie padać, matka odpowiedziała: „Jedna jaskółka wiosny nie czyni", i na tym dyskusja się skończyła. Dopiero na studiach zrozumiałam, że to zdanie nie dotyczy ani pogody, ani ptaków. Dotyczy tego, czym jest dowód.

Najlepszy przykład, jaki znam, podał Euler. Weźmy wyrażenie $n^2 + n + 41$ i podstawiajmy kolejno $n = 0, 1, 2, \ldots$ Dla zera dostajemy 41, dla jedynki 43, dla dwójki 47, dla trójki 53. Wszystko to są liczby pierwsze. Ciągniemy dalej: 61, 71, 83, 97 — pierwsze, pierwsze, pierwsze. Można przepisać cały rachunek do czterdziestego kroku i za każdym razem trafi się liczba pierwsza. Czterdzieści zgodnych przykładów. Kto by się upierał, że wzór nie działa zawsze?

Dla $n = 40$ mamy $40^2 + 40 + 41 = 1681$. A $1681 = 41^2$. Jaskółka nie przyleciała.

Nie trzeba było długo szukać; wystarczyło zauważyć, że dla $n = 41$ wszystkie trzy składniki dzielą się przez 41. Wzór nie był przypadkiem, tylko pułapką, w której przykłady ustawiają się w schludny szereg tylko dlatego, że pierwszy błąd leży za horyzontem naszej cierpliwości. Gdyby ktoś sprawdził trzydzieści dziewięć wartości, miałby dokładnie tyle samo „dowodu" co ktoś, kto sprawdził czterdzieści.

Matematyka ma jednak narzędzie, które pozwala powiedzieć coś o wszystkich liczbach naturalnych naraz i nie jest przy tym sztuczką: indukcję. Jej schemat zna każdy, kto widział domino. Pokazujemy, że przewróci się pierwszy kamień. Pokazujemy, że jeśli przewróci się kamień o numerze n, to przewróci się także kamień o numerze $n + 1$. I to wszystko; przewrócą się wszystkie. Nie sprawdzamy ich po kolei. Sprawdzamy mechanizm.

Wartość tego schematu polega na tym, że krok musi być udowodniony *dla każdego* n, a nie dla kilku wybranych. I tutaj zaczynają się historie, które lubię najbardziej, bo bywają to historie o błędach popełnianych bardzo starannie.

Znany jest „dowód", że wszystkie konie mają tę samą maść. Twierdzenie brzmi: w każdej grupie n koni wszystkie konie są tej samej maści. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Załóżmy, że działa dla grup n-elementarnych, i weźmy $n + 1$ koni. Usuńmy jednego: pozostałe n ma tę samą maść. Usuńmy innego: znów n koni o tej samej maści. Ale te dwie grupy mają wspólnych koni, więc maść jest ta sama w całej grupie. Koniec, indukcja zakończona, a rzeczywistość się kłóci.

Błąd tkwi w jednym miejscu, i szukanie go to doskonałe ćwiczenie: krok indukcyjny zakłada, że obie grupy mają wspólnego konia. To prawda dla $n \geq 2$. Ale przejście od jednego konia do dwóch — z $n = 1$ do $n = 2$ — nie ma wspólnego elementu, bo grupy są jednoelementowe i rozłączne. Domino numer jeden nie przewraca domina numer dwa. Cały łańcuch rozpada się w pierwszym ogniwie, choć wszystkie kolejne ogniwa są poprawne.

Lubię ten przykład dlatego, że pokazuje coś, czego nie pokazuje trójmian Eulera. Euler zawodził dopiero po czterdziestu krokach; konie zawodzą natychmiast, tylko trzeba wiedzieć, gdzie patrzeć. W obu przypadkach błąd jest taki sam: ktoś uznał, że sprawdził mechanizm, a sprawdził tylko jego wygląd.

Przysłowie o jaskółce ma jednak drugą stronę, o której mówi się rzadziej. Jeśli jedna jaskółka niczego nie dowodzi, to jedna zima, która nie przyszła, też nie dowodzi niczego. Ale jeden kontrprzykład obala twierdzenie raz na zawsze. Trójmian Eulera jest martwy od chwili, gdy ktoś podstawił czterdziestkę. Nikt nie musi czekać na drugą próbę. Asymetria między potwierdzeniem a obaleniem jest największą cechą tej dyscypliny: tysiąc przykładów nie dowodzi, jeden zaprzecza.

Wolałabym, żeby nauczono mnie tego wcześniej, nie na wykładzie z logiki, ale przy kuchennym

stole. Tam, gdzie wnioski wyciąga się z trzech tygodni suszy, z jednego spotkania, z dwóch przyjaciół, którzy się nie odezwali. Może wtedy zamiast pytać „ile razy to się sprawdziło?", częściej pytałabym o to, czego rzeczywiście dowiedli. Czy znam mechanizm, czy tylko widziałam kilka jaskółek.

Mój brat, nawiasem mówiąc, nie przestał twierdzić, że już nie będzie padać. Tydzień później zmókł do suchej nitki. Przyszedł do domu, usiadł przy stole i powiedział: „Trzy tygodnie to jednak za mało". Matka postawiła przed nim herbatę. Nie powiedziała ani słowa. Nie musiała. Dowód został przeprowadzony.