Asymptote
ISSN 3072-4929

Kategoria

KĄCIK OLIMPIJCZYKA

Trzydzieści dowodów przez indukcję

Zasada indukcji matematycznej w działaniu

Zofia Dębicka

Asymptote 06/2026 · październik 2026
© 2026 Asymptote

Streszczenie. Odcinek Kącika Olimpijczyka poświęcony jednemu narzędziu: zasadzie indukcji matematycznej. Trzydzieści krótkich, kompletnych dowodów przez indukcję — od sum i nierówności, przez podzielność, ciąg Fibonacciego i kombinatorykę geometryczną, po indukcję zupełną, rekurencje i klasyczne zadanie o wyrażeniu x plus jeden przez x. Każdy dowód ma tę samą budowę: baza, założenie, krok. Różni je to, co w kroku trzeba zauważyć.

Zasada

Niech $T(n)$ będzie zdaniem o liczbie naturalnej n. Jeśli $T(n_0)$ jest prawdziwe (*baza*) i dla każdego $n \geq n_0$ z prawdziwości $T(n)$ (*założenie indukcyjne*) wynika prawdziwość $T(n+1)$ (*krok*), to $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geq n_0$. W wersji zupełnej w kroku wolno korzystać z $T(k)$ dla wszystkich $n_0 \leq k \leq n$. Poniżej trzydzieści dowodów; w każdym znaczek „baza” oznacza sprawdzenie najmniejszego n, a „krok” przejście od n do $n+1$.

Sumy i iloczyny

Zadanie 1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Dowód. Baza: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$. Krok: $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. ∎

Zadanie 2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Dowód. Baza: $1 = 1^2$. Krok: $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$. ∎

Zadanie 3. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Dowód. Baza: $1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$. Krok: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. ∎

Zadanie 4. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Dowód. Baza: $1 = 1^2$. Krok: $\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2\,(n^2+4n+4)}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$. ∎

Zadanie 5. Dla $q \neq 1$: $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ $(n \geq 0)$.

Dowód. Baza: $1 = \frac{q-1}{q-1}$. Krok: $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$. ∎

Zadanie 6. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

Dowód. Baza: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Krok: $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$. ∎

Zadanie 7. $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Dowód. Baza: $2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}$. Krok: $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$. ∎

Zadanie 8. Dla $n \geq 2$: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$.

Dowód. Baza: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Krok: $\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. ∎

Nierówności

Zadanie 9. Dla $n \geq 1$: $2^n > n$.

Dowód. Baza: $2 > 1$. Krok: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n \geq n+1$. ■

Zadanie 10. Dla $n \geq 1$: $n! \geq 2^{n-1}$.

Dowód. Baza: $1 \geq 1$. Krok: $(n+1)! = (n+1)\,n! \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, bo $n+1 \geq 2$. ■

Zadanie 11 (nierówność Bernoulliego)**.** Dla $x \geq -1$ i $n \geq 1$: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Dowód. Baza: równość. Krok: ponieważ $1+x \geq 0$, mnożymy założenie przez $1+x$: $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$. ■

Zadanie 12. Dla $n \geq 5$: $n^2 < 2^n$.

Dowód. Baza: $25 < 32$. Krok: dla $n \geq 3$ mamy $2n+1 < n^2$, więc $(n+1)^2 = n^2+2n+1 < 2n^2 < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. ■

Zadanie 13. $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$.

Dowód. Baza: $1 \leq 1$. Krok: wystarczy $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, a to jest równoważne $n \leq n+1$. ■

Zadanie 14. $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$.

Dowód. Baza: $1 > 2(\sqrt{2}-1) \approx 0{,}83$. Krok: wystarczy $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$, tj. $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > 2\sqrt{n+1}$, co jest prawdą. ■

Zadanie 15. Ciąg $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ spełnia $a_n < 2$ dla każdego n.

Dowód. Baza: $\sqrt{2} < 2$. Krok: z $a_n < 2$ mamy $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{4} = 2$. ■

Podzielność

Zadanie 16. $6 \mid 7^n - 1$.

Dowód. Baza: $7 - 1 = 6$. Krok: $7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6$. ■

Zadanie 17. $3 \mid n^3 + 2n$.

Dowód. Baza: $1 + 2 = 3$. Krok: $(n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3+2n) + 3(n^2+n+1)$. ■

Zadanie 18. $7 \mid 11^n - 4^n$.

Dowód. Baza: $11 - 4 = 7$. Krok: $11^{n+1} - 4^{n+1} = 11\,(11^n - 4^n) + 7 \cdot 4^n$. ■

Zadanie 19. Każdą kwotę całkowitą $n \geq 8$ złotych można zapłacić monetami o nominałach 3 i 5 złotych.

Dowód. Indukcja zupełna. Bazy: $8 = 3+5$, $9 = 3+3+3$, $10 = 5+5$. Krok: dla $n \geq 11$ kwota $n-3 \geq 8$ jest płatna z założenia; dokładamy monetę trzyzłotową. ■

Zadanie 20. Każda liczba naturalna $n \geq 2$ ma dzielnik pierwszy.

Dowód. Indukcja zupełna. Jeśli n jest pierwsza, jest własnym dzielnikiem pierwszym. Inaczej $n = ab$ z $1 < a < n$; z założenia a ma dzielnik pierwszy, który dzieli także n. ■

Ciąg Fibonacciego

Niech $F_1 = F_2 = 1$ i $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Zadanie 21. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Dowód. Baza: $1 = F_3 - 1 = 2 - 1$. Krok: $F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$. ■

Zadanie 22. $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

Dowód. Baza: $1 = 1 \cdot 1$. Krok: $F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2}$. ■

Kombinatoryka i geometria

Zadanie 23. Zbiór n-elementowy ma 2^n podzbiorów.

Dowód. Baza: zbiór pusty ma jeden podzbiór, $2^0 = 1$. Krok: w zbiorze $(n+1)$-elementowym wyróżnijmy element a. Podzbiorów bez a jest 2^n (z założenia), a podzbiorów z a jest tyle samo, bo odpowiadają im wzajemnie jednoznacznie podzbiory bez a po dołożeniu a. Razem $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. ■

Zadanie 24. Wypukły n-kąt ($n \geq 3$) ma $\dfrac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.

Dowód. Baza: trójkąt nie ma przekątnych. Krok: z wypukłego $(n+1)$-kąta $V_1 \ldots V_{n+1}$ usuńmy wierzchołek V_{n+1}. Przekątnych n-kąta $V_1 \ldots V_n$ jest $\frac{n(n-3)}{2}$. Dochodzą: bok V_nV_1, który staje się przekątną, oraz $n-2$ przekątne wychodzące z V_{n+1} (do wszystkich wierzchołków z wyjątkiem V_n, V_1 i jego samego). Razem $\frac{n(n-3)}{2} + (n-2) + 1 = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$. ■

Zadanie 25. Suma kątów wewnętrznych wypukłego n-kąta ($n \geq 3$) wynosi $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Dowód. Baza: trójkąt, 180°. Krok: przekątna V_nV_1 odcina od wypukłego $(n+1)$-kąta trójkąt $V_nV_{n+1}V_1$ i n-kąt $V_1 \ldots V_n$. Kąty obu części sumują się do kątów $(n+1)$-kąta, zatem suma wynosi $(n-2) \cdot 180^\circ + 180^\circ = (n-1) \cdot 180^\circ$. ■

Zadanie 26. n prostych na płaszczyźnie, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie, dzieli płaszczyznę na $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ obszarów.

Dowód. Baza: $n = 0$ daje jeden obszar. Krok: $(n+1)$-sza prosta przecina n poprzednich w n różnych punktach, które dzielą ją na $n+1$ odcinków (łącznie z promieniami). Każdy z nich dzieli jeden dotychczasowy obszar na dwa, więc przybywa $n+1$ obszarów: $\frac{n^2+n+2}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$. ■

Zadanie 27 (wieże Hanoi)**.** n krążków można przenieść z jednego pręta na inny w $2^n - 1$ ruchach, zgodnie z regułami (jeden krążek na ruch, większy nigdy na mniejszym).

Dowód. Baza: jeden krążek, jeden ruch. Krok: n górnych krążków przenosimy na pręt pomocniczy ($2^n - 1$ ruchów), największy na pręt docelowy (1 ruch), potem n krążków z pomocniczego na największy ($2^n - 1$ ruchów). Razem $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$. ■

Analiza i liczby zespolone

Zadanie 28. $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ dla $n \geq 1$.

Dowód. Baza: $(x)' = 1$. Krok: z reguły Leibniza $(x \cdot x^n)' = x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n$. ■

Zadanie 29 (wzór de Moivre'a)**.** $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ dla $n \geq 1$.

Dowód. Baza: oczywista. Krok: $(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta) + i(\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta) = \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta$. ■

Zadanie olimpijskie

Zadanie 30. Niezerowa liczba rzeczywista x spełnia $x + \dfrac{1}{x} = m$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 0$ liczba $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ jest całkowita.

Dowód. Niech $s_n = x^n + x^{-n}$. Mamy $s_0 = 2$ i $s_1 = m$, obie całkowite. Dla $n \geq 1$

$$s_1 s_n = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) = s_{n+1} + s_{n-1},$$

czyli $s_{n+1} = m\, s_n - s_{n-1}$. Indukcja zupełna z dwiema bazami: jeśli s_{n-1} i s_n są całkowite, to $s_{n+1} = m s_n - s_{n-1}$ też jest całkowite. Stąd $s_n \in \mathbb{Z}$ dla każdego $n \geq 0$. ■

Zamiast zakończenia

Ten ostatni dowód pokazuje, po co indukcji dwie bazy: krok odwołuje się do dwóch poprzedników, więc jedna baza nie uruchomiłaby mechanizmu. W każdym z trzydziestu przykładów pytanie jest to samo: co z n można przenieść na $n + 1$? Gdy znamy odpowiedź, reszta jest rachunkiem. Własne dowody przez indukcję, szczególnie te z nietypowym krokiem, można zgłaszać przez stronę czasopisma.