Asymptote
ISSN 3072-4929

Kategoria

KĄCIK OLIMPIJCZYKA

Gołębie w szufladach

Zasada szufladkowa Dirichleta w dziesięciu zadaniach

Marek Szczepański

Asymptote 07/2026 · listopad 2026
© 2026 Asymptote

Streszczenie. Odcinek Kącika Olimpijczyka poświęcony zasadzie szufladkowej Dirichleta, w wersji ze stadem gołębi, które muszą się jakoś pomieścić w gołębniku. Dziesięć zadań z pełnymi dowodami, od najprostszych (urodziny i miesiące) przez zadania z resztami, grafy znajomości i punkty w kwadracie, aż po twierdzenie Erdősa–Szekeresa o ciągach monotonicznych i aproksymację Dirichleta. W każdym zadaniu cała trudność polega na jednym: odgadnąć, co jest gołębiem, a co gołębnikiem.

Gołębie i gołębnik

Wyobraźmy sobie gołębnik z dziurami na dziesięć gołębi. Wypuszczamy jedenaście. Gdy wszystkie wrócą do domu, w którejś dziurze zrobi się tłoczno: będą w niej co najmniej dwa. Nie wiadomo, w której. Nie wiadomo, które. Wiadomo tylko, że tak musi być. Tyle że to nie jest zagadka o ptakach, tylko jedno z najpotężniejszych narzędzi olimpijskich: *jeśli $n+1$ obiektów rozmieścimy w n pojemnikach, to w pewnym pojemniku znajdą się co najmniej dwa.* Mówi się też: jeśli $kn+1$ obiektów w n pojemnikach, to w pewnym co najmniej $k+1$.

Dowód jest jednozdaniowy. Gdyby w każdym pojemniku był najwyżej jeden obiekt, wszystkich byłoby najwyżej n. Cała sztuka tkwi w zadaniu, nie w dowodzie: trzeba zdecydować, co będzie *gołębiem*, a co *gołębnikiem*. (Kto woli kuchenną wersję, niech sobie wyobrazi gołąbki w kapuście: dwanaście gołąbków do jedenastu naczyń, i w którymś leżą dwa. Wniosek ten sam, ale zakończenie przyjemniejsze.)

Zadania

Zadanie 1 (rozgrzewka)**.** Wykaż, że wśród dowolnych 13 osób są dwie urodzone w tym samym miesiącu.

Dowód. Gołębie: osoby, jest ich 13. Gołębniki: miesiące, jest ich 12. Skoro $13 > 12$, w pewnym miesiącu urodziły się co najmniej dwie osoby. ■

Zadanie 2. Wykaż, że spośród dowolnych 25 gołębi umieszczonych w 7 gołębnikach w pewnym gołębniku siedzą co najmniej cztery.

Dowód. Gdyby w każdym gołębniku siedziały co najwyżej trzy, wszystkich gołębi byłoby co najwyżej $7 \cdot 3 = 21 < 25$. Sprzeczność. ■

Zadanie 3. Wykaż, że spośród dowolnych $n+1$ liczb całkowitych można wybrać dwie, których różnica dzieli się przez n.

Dowód. Gołębie: liczby ($n+1$). Gołębniki: reszty z dzielenia przez n (n możliwości: $0, 1, \ldots, n-1$). Dwie liczby mają tę samą resztę, więc ich różnica dzieli się przez n. ■

Zadanie 4. Z liczb $1, 2, \ldots, 100$ wybrano 51 liczb. Wykaż, że wśród wybranych są dwie, których suma wynosi 101.

Dowód. Gołębniki: pary $\{k, 101-k\}$ dla $k = 1, \ldots, 50$; jest ich 50 i każda liczba ze zbioru należy do dokładnie jednej pary. Wybrano 51 liczb, więc dwie z nich leżą w tej samej parze, a ponieważ są różne, to obie liczby tej pary zostały wybrane i dają sumę 101. ■

Zadanie 5. Z liczb $1, 2, \ldots, 2n$ wybrano $n+1$ liczb. Wykaż, że wśród wybranych są dwie względnie pierwsze.

Dowód. Gołębniki: pary kolejnych liczb $\{1,2\}, \{3,4\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$; jest ich n. Dwie z wybranych liczb leżą w tej samej parze, więc są kolejnymi liczbami całkowitymi, a te są względnie pierwsze, bo każdy wspólny dzielnik dzieliłby ich różnicę 1. ■

Zadanie 6. Pięć punktów leży wewnątrz lub na brzegu kwadratu o boku 1. Wykaż, że dwa z nich są odległe o nie więcej niż $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dowód. Podzielmy kwadrat na cztery kwadraty o boku $\frac{1}{2}$ (gołębniki; punkt na wspólnym brzegu przypisujemy dowolnemu z sąsiadujących). Pięć punktów, cztery kwadraty: dwa punkty leżą w tym samym małym kwadracie. Największa odległość dwóch punktów małego kwadratu to jego przekątna, czyli $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Zadanie 7. Na przyjęciu jest $n \geq 2$ osób. Wykaż, że dwie z nich mają tyle samo znajomych na tym przyjęciu. (Znajomość jest wzajemna.)

Dowód. Liczba znajomych każdej osoby należy do zbioru $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Gdyby ktoś miał 0 znajomych, a ktoś inny $n-1$ (czyli znał wszystkich), to znałby też tego pierwszego — sprzeczność. Zatem wartości 0 i $n-1$ nie występują jednocześnie, więc dostępnych wartości (gołębników) jest co najwyżej $n-1$, a osób (gołębi) jest n. ■

Zadanie 8. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n istnieje niezerowa wielokrotność liczby n, której zapis dziesiętny składa się wyłącznie z cyfr 0 i 1.

Dowód. Rozważmy $n+1$ liczb: $1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{n+1}$. Ich reszty z dzielenia przez n należą do zbioru n-elementowego, więc dwie z tych liczb, $\underbrace{1\ldots1}_{a}$ i $\underbrace{1\ldots1}_{b}$ $(a > b)$, mają tę samą resztę. Ich różnica, czyli $\underbrace{1\ldots1}_{a-b}\underbrace{0\ldots0}_{b}$, jest podzielna przez n, jest dodatnia i ma w zapisie same zera i jedynki. ■

Zadanie 9 (Erdős–Szekeres)**.** Z dowolnego ciągu n^2+1 różnych liczb rzeczywistych można wybrać podciąg monotoniczny (rosnący lub malejący) długości $n+1$.

Dowód. Niech ciąg to $a_1, \ldots, a_{n^2+1}$. Dla każdego i niech r_i będzie długością najdłuższego podciągu rosnącego kończącego się na a_i, a m_i — najdłuższego malejącego kończącego się na a_i. Przypuśćmy, że żaden podciąg monotoniczny nie ma długości $n+1$, czyli $1 \leq r_i, m_i \leq n$ dla wszystkich i. Par (r_i, m_i) jest co najwyżej n^2 możliwych (gołębniki), a indeksów n^2+1 (gołębie), więc dla pewnych $i < j$ mamy $(r_i, m_i) = (r_j, m_j)$. Ale jeśli $a_i < a_j$, to dołączając a_j do najdłuższego rosnącego podciągu kończącego się na a_i dostajemy $r_j \geq r_i + 1$, a jeśli $a_i > a_j$, to analogicznie $m_j \geq m_i + 1$. W obu przypadkach pary się różnią — sprzeczność. ■

Zadanie 10 (aproksymacja Dirichleta)**.** Dla dowolnej liczby rzeczywistej α i dowolnej liczby naturalnej N istnieją liczby całkowite p i q, takie że $1 \leq q \leq N$ oraz $|q\alpha - p| < \dfrac{1}{N}$.

Dowód. Rozważmy $N+1$ liczb: części ułamkowe $\{0\cdot\alpha\}, \{1\cdot\alpha\}, \ldots, \{N\alpha\}$, każda należy do $[0,1)$. Podzielmy ten przedział na N przedziałów $\left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right)$ (gołębniki). Dwie części ułamkowe, $\{k\alpha\}$ i $\{l\alpha\}$ z $k > l$, leżą w tym samym przedziale, więc różnią się o mniej niż $\frac{1}{N}$. Ponieważ $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, to dla $q = k - l \in \{1, \ldots, N\}$ i pewnej liczby całkowitej p mamy $|q\alpha - p| < \frac{1}{N}$. ■

Zamiast zakończenia

Zasada szufladkowa jest dziwnym narzędziem: nie mówi, gdzie jest szukany obiekt, tylko że istnieje. Często właśnie o to chodzi w zadaniach „wykaż, że istnieją dwie…”. Przed każdym takim zadaniem warto zadać sobie dwa pytania: ile jest gołębi i ile gołębników — a jeśli gołębników jest za dużo, czy da się ich zmniejszyć sprytniejszym podziałem (pary, reszty, mniejsze kwadraty). Własne zadania na gołębie, w gołębnikach i bez nich, można zgłaszać przez stronę czasopisma.